ALLEGATO B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
selezione pubblica per n. 1 posto di Ricercatore a tempo determinato ai sensi dell'art.24, comma 3, lettera b) della Legge 240/2010 per il settore concorsuale 01/A3 - Analisi Matematica, Probabilità e Statistica Matematica, settore scientifico-disciplinare MAT/05 - Analisi Matematica, presso il Dipartimento di Matematica,
(avviso bando pubblicato sulla G.U. n. 53 del 05/07/2019) Codice concorso 4139

[Alessandro Iacopetti]
CURRICULUM VITAE

INFORMAZIONI PERSONALI

COGNOME	IACOPETTI
NOME	ALESSANDRO
DATA DI NASCITA	[29, 12, 1982]

Istruzione e formazione:

Laurea Specialistica in Matematica, conseguita presso l'Università di Pisa il 28/03/2008, con votazione 110/110 e lode. Titolo della tesi: "Sistemi ellittici totalmente non lineari del secondo ordine". Relatore: Prof. Antonio Tarsia.

Dottorato di Ricerca in Matematica, conseguito presso l'Università di Roma Tre in data 09/04/2015. Titolo della tesi: "Sign-changing solutions of the Brezis–Nirenberg problem: asymptotics and existence results". Relatore: Prof.ssa Filomena Pacella

Borse di studio, assegni di ricerca, post-doc:

- Vincitore di un posto con borsa al concorso per l'ammissione al XVII ciclo (1/1/2012-31/12/2014) del Dottorato in Matematica presso l'Università di Roma Tre. (Settembre 2011)
- Vincitore di un assegno di ricerca annuale presso il Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università "La Sapienza" Roma. Periodo di fruizione: 01/04/2015–30/04/2015.
- Vincitore di un assegno di ricerca biennale (ed esteso per 2 mesi) presso il Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università di Torino. Periodo di fruizione: 01/05/2015–30/06/2017.
- Vincitore di un post-doc annuale presso l'Université Libre de Bruxelles. Periodo di fruizione: 01/07/2017–30/06/2018.
- Vincitore di un assegno di ricerca annuale presso il Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università "La Sapienza" Roma (Dicembre 2018). In servizio dal 01/02/2019.
- Vincitore di un post-doc biennale assegnato dalla fondazione della ricerca dello stato di San Paolo (Brasile) FAPESP, presso Instituto de ciências matemáticas e de computação, Universidade de São Paulo.
- Vincitore del concorso FNRS-F.N.R. (Fonds de la Recherche Scientifique), Chargé de recherches - 2019, per l'attribuzione di borse post-doc triennali in belgio. Titolo del progetto finanziato: "On the regularity of the minimizer of the electrostatic

Born-Infeld energy and the existence of spacelike hypersurfaces of prescribed mean curvature in the Lorentz-Minkowski space". Sede scelta per l'attività di ricerca: Université Libre de Bruxelles.

Esperienza lavorativa e didattica:

- Docente di Matematica e Fisica e tutor presso il Liceo Linguistico "G.G. Byron" di Lucca (Febbraio 2009-Luglio 2011)
- Esercitatore di Analisi Matematica II per il corso di laurea in Fisica, Università di Roma Tre. (I semestre a.a. 2014/2015), Responsabile del corso: Prof. P. Esposito.
- Supervisore di parte della tesi di Dottorato del Dr. Gabriele Cora, Università di Torino.

Finanziamenti:
Ottenuto un finanziamento da parte del Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni, dell' INDAM per il progetto: "Il modello di Born-Infeld per l'elettromagnetismo nonlineare: esistenza, regolarità e molteplicità di soluzioni".
Coordinatore del progetto: Dott.ssa F. Colasuonno.

Partecipazione a Scuole e Convegni:

(1) Scuola "Trends in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations" organizzata dalla Scuola Matematica Internazionale (SMI) a Cortona (15-27 Luglio 2012)
(2) Scuola estiva "Nonlinear PDEs from Geometry and Physics", organizzata dal dipartimento di Matematica di Roma Tre (17-21 Settembre 2012)
(3) Conferenza internazionale "Analysis and Partial Differential Equations" presso la British Columbia University, Vancouver, Canada (7-12 Luglio 2013)
(4) Scuola "P(n) School on Recent Trends in Nonlinear PDEs" presso il Dipartimento di Matematica de "La Sapienza", Roma (17-20 settembre 2013)
(5) Scuola "Spring school on nonlinear PDEs" presso il Dipartimento di Matematica de "La Sapienza", Roma (24-27 Marzo 2014)
(6) Scuola "Corso Intensivo di Calcolo delle Variazioni" tenutasi presso il dipartimento di Matematica dell'Università di Catania (9-14 Giugno 2014)
(7) Conferenza "2nd conference on recent trends in nonlinear phenomena", Napoli (4-6 Novembre 2015)
(8) Scuola e Workshop "PDEs and Applications", Napoli (8-12 Febbraio 2016)
(9) Conferenza "First Belgium Chile Italy Conference in PDEs", Bruxelles (13-17 Novembre 2017)
(10) Scuola e Workshop "Intensive week of PDEs at Spa", Spa (11-15 Dicembre 2017)
(11) Scuola e Workshop "Intensive Week of PDEs@Cogne", Cogne (2-7 Giugno 2019)

Comunicazioni, Seminari, Conferenze:

(1) Comunicazione al convegno "Two- Day Meeting in Honor of Antonio Ambrosetti", Venezia, Istituto Canossiano Le Romite (Dicembre 2014)
(2) Seminario presso il Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università "La Sapienza", Roma (4 Febbraio 2016)
(3) Speaker alla conferenza "Bruxelles-Torino talks in PDEs", Torino, (2-5 Maggio 2016)
(4) Comunicazione alla conferenza "9th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems", Gaeta (Italia). (23-27 Maggio 2016)
(5) Speaker alla conferenza "PDEs at the Grand Paradis", Cogne (20-24 Giugno, 2016)
(6) Comunicazione al congresso "The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications", Orlando, Florida (USA) (1-5 Luglio, 2016)

(7) Speaker invitato al workshop "Roma Caput PDE", Università "La Sapienza", Roma (23-26 Gennaio 2017).
(8) Speaker invitato al convegno "Topics in nonlinear analysis and applications", Università Milano "Bicocca", Milano (15-16 Marzo 2017).
(9) Comunicazione alla conferenza "Nonlinear Analysis in Rome", University of Notre Dame Rome (26-30 Giugno 2017).
(10) Speaker invitato alla conferenza "Nonlinear Analysis and PDEs in Caserta", Università degli Studi della Campania "L. Vanvitelli", Caserta (10-14 Settembre 2018).
(11) Comunicazione alla conferenza "Partial Differential Equations in Analysis and Mathematical Physics", Cagliari (30 Maggio-1 Giugno 2019).

Periodi di visita:

(1) Université Libre de Bruxelles, invitato dal Prof. Denis Bonheure, Bruxelles, 13-18 Novembre 2016.
(2) Università di Torino, invitato dal Prof. Paolo Caldiroli, 11-18 Maggio 2018 e 3-28 Settembre 2018.

Pubblicazioni:

(1) A. Iacopetti, *Asymptotic analysis for radial sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem,* Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 194 Issue 6, 1649–1682 (2015).
(2) A. Iacopetti, F. Pacella, *A nonexistence result for sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem in low dimensions*, Journal of Differential Equations, 258 no. 12, 4180–4208 (2015).
(3) A. Iacopetti, F. Pacella, *Asymptotic analysis for radial sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem in low dimensions*, Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Appl., Springer, Vol. 86, 325–343 (2015).
(4) A. Iacopetti, G. Vaira, *Sign-changing tower of bubbles for the Brezis-Nirenberg problem*, Commun. Contemp. Math., **18** (2016), 1550036.
(5) P. Caldiroli, A. Iacopetti, *Existence of stable H-surfaces in cones and their representation as radial graphs*, Calculus of Variations and PDE's (2016), 55: 131. doi:10.1007/s00526-016-1074-8.
(6) A. Iacopetti, G. Vaira, *Sign-changing blowing-up solutions for the Brezis–Nirenberg problem in dimensions four and five*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. XVIII, Issue 1, 1–38 (2018), doi: 10.2422/2036-2145.201602_003.
(7) P. Caldiroli, A. Iacopetti, *Existence of isovolumetric* $\mathbb{S}^2$*-type stationary surfaces for capillarity functionals*, Revista Matemàtica Iberoamericana 34, no. 4, 1685–1709 (2018).
(8) G. Cora, A. Iacopetti, *On the structure of the nodal set and asymptotics of least energy sign-changing radial solutions of the fractional Brezis-Nirenberg problem*, Nonlinear Analysis 176, 226–271 (2018).
(9) D. Bonheure, A. Iacopetti, *On the regularity of the minimizer of the electrostatic Born-Infeld energy*, Arch. Ration. Mech. Anal. 232, 697–725 (2019).
(10) D. Bonheure, A. Iacopetti, *Spacelike radial graphs of prescribed mean curvature in the Lorentz-Minkowski space*, Analysis & PDE, Vol. 12, No. 7, 1805-1842 (2019), doi:10.2140/apde.2019.12.1805.
(11) G. Cora, A. Iacopetti, *Sign-changing bubble-tower solutions to fractional semilinear elliptic problems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-A, Vol. 39, No. 10, 6149–6173 (2019), doi: 10.3934/dcds.2019268.

Preprint:

(1) F. Leoni, G. Galise, A. Iacopetti *Liouville-type results in exterior domains for radial solutions of fully nonlinear equations* (sottomesso) arXiv:1907.12985.

Lavori in preparazione:

(1) P. Caldiroli, A. Iacopetti, M. Musso, *Delaunay tori with radially symmetric prescribed mean curvature.*
(2) F. Leoni, G. Galise, A. Iacopetti, F. Pacella, *Concentration of radial sign-changing solutions in a ball for a class of fully nonlinear equations.*

Attività scientifica:

L'ambito della mia attività di ricerca è quello dell'Analisi non lineare, con applicazione a questioni connesse alle Equazioni alle derivate parziali, al Calcolo delle variazioni, e alla Geometria differenziale.

Durante il periodo di stesura della tesi di laurea specialistica ho acquisito una buona conoscenza della teoria della regolarità ellittica e della teoria relativa alle equazioni ellittiche totalmente non lineari. In tale ambito ho ottenuto risultati parziali concernenti la differenziabilità globale di soluzioni forti per equazioni e sistemi ellittici totalmente non lineari, che soddisfano una condizione introdotta da S. Campanato.

Il tema di ricerca affrontato durante il dottorato è stato lo studio di un problema ellittico semilineare classico, noto come "Problema di Brezis-Nirenberg", e lo scopo della tesi è stato quello di fornire contributi relativi all'analisi asintotica, all'esistenza (e non esistenza) di soluzioni che cambiano segno di energia minima del tipo "tower of bubbles".

Come assegnista di ricerca presso l'Università di Torino mi sono occupato di alcune tematiche legate al problema di Plateau e al problema della ricerca di punti critici vincolati per funzionali di tipo capillarità. In particolare, ho studiato il problema dell'ostacolo per H-superfici in coni, la loro rappresentazione globale come grafico radiale, e l'esistenza di punti critici di tipo sella vincolati al volume per funzionali di tipo capillarità, in relazione anche al problema delle H-bolle. Inoltre, ho supervisionato parte della tesi di dottorato del Dott. G. Cora, proponendo come argomento lo studio delle proprietà qualitative ed asintotiche di soluzioni nodali di energia minima di problemi ellittici semilineari frazionari.

Come post-doc presso l'Université Libre de Bruxelles ho realizzato due lavori. Il primo articolo riguarda il problema di Plateau per grafici radiali di curvatura media prescritta (di tipo spazio) nello spazio di Lorentz-Minkowski, che si appoggiano su domini limitati dello spazio iperbolico. Il secondo riguarda la regolarità $C^{1,\alpha}$-locale del minimo dell'energia elettrostatica di Born-Infeld, e delle relazioni con la PDE corrispondente, governata dall'operatore di curvatura media nello spazio di Lorentz-Minkowski.

Attualmente come assegnista di ricerca presso l'Università di Roma "La Sapienza", in collaborazione con le Prof.sse F. Pacella, F. Leoni e il Dott. G. Galise stiamo studiando i fenomeni di concentrazione per le soluzioni nodali di problemi semilineari quasi sottocritici, governati dagli operatori estremali di Pucci.

Una breve descrizione delle questioni affrontate e dei risultati ottenuti è la seguente:

Problema di Brezis–Nirenberg: consideriamo il problema ellittico semilineare

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio limitato e regolare, $N \geq 3$, $\lambda > 0$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ è l'esponente critico per l'immersione di Sobolev di $H_0^1(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, $p > 1$.

Poiché l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^{2^*}(\Omega)$ non è compatta, ci sono difficoltà nel cercare punti critici del funzionale energia associato a (1) con i metodi diretti del calcolo delle variazioni. Inoltre osserviamo che (1) è connesso a molti problemi in ambito geometrico e fisico in cui manca compattezza, fra tutti ricordiamo il problema di Yamabe. Per questi motivi il Problema (1) è stato ampiamente studiato nel corso degli ultimi decenni.

Il primo risultato fondamentale è contenuto in un articolo di Brezis e Nirenberg [16], e riguarda l'esistenza di soluzioni positive. In tale lavoro è stato messo in luce il ruolo determinante che la dimensione gioca nello studio di (1). Infatti è stato provato che:

- se $N \geq 4$ allora esiste una soluzione positiva di (1) per ogni $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$, dove $\lambda_1(\Omega)$ è il primo autovalore di $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$.
- se $N = 3$ allora esistono soluzioni positive per λ lontano da zero. Se $\Omega = B$ è una palla, esistono soluzioni positive se e solo se $\lambda \in (\frac{\lambda_1(B)}{4}, \lambda_1(B))$.

Per quanto riguarda le soluzioni che cambiano segno sono stati ottenuti in [23] risultati di esistenza sia per $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$ che per $\lambda > \lambda_1(\Omega)$, quando $N \geq 4$. Il caso $N = 3$ presenta anche maggiori difficoltà rispetto a quanto visto per le soluzioni positive: infatti non è ancora noto se esistano o meno soluzioni nodali non radiali nella palla per $\lambda \in (0, \frac{\lambda_1(B)}{4})$. Tuttavia anche le dimensioni $N = 4, 5, 6$ presentano peculiarità interessanti. Infatti, Atkinson, Brezis e Peletier in [2], e Adimurthi e Yadava in [1], hanno provato che esiste un numero positivo $\lambda^* = \lambda^*(N)$ tale che soluzioni radiali di (1) nella palla che cambiano segno non possono esistere per $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Per $N \geq 7$, tali soluzioni invece esistono sempre, per $\lambda \in (0, \lambda_1(B))$, come provato da Cerami, Solimini e Struwe in [24]. Dal risultato di non esistenza di Atkinson, Brezis e Peletier sorge una domanda:

(Q1) E' possibile estendere, in qualche modo, questo risultato ad altri domini limitati? E quali sono le soluzioni nodali che giocano lo stesso ruolo di quelle radiali nel caso della palla?

Altri risultati legati a questa questione, sono stati ottenuti successivamente da Ben Ayed, El Mehdi e Pacella [8, 9], i quali hanno analizzato il comportamento asintotico di soluzioni di energia minima che cambiano segno in domini generali Ω, in dimensione $N = 3$ e $N \geq 4$, per λ che tende al valore limite per il quale esistono soluzioni nodali. Tale valore limite del parametro è un certo $\bar{\lambda} > 0$, se $N = 3$, ed è 0 se $N \geq 4$. Più precisamente, essi hanno studiato soluzioni nodali u_λ di (1) tali che $\|u_\lambda\|^2 \to 2S^{N/2}$ (dove $\|\cdot\|$ è la norma usuale di $H_0^1(\Omega)$, S è la migliore costante di Sobolev) e provato che:

i) se $N = 3$ la parte positiva u_λ^+ e la parte negativa u_λ^- scoppiano e si concentrano in due punti distinti di Ω, per $\lambda \to \bar{\lambda}$, ed esse hanno entrambe il profilo asintotico di una (standard) "bubble" in $\mathbb{R}^3$ (cioè di una soluzione positiva di energia finita dell'equazione $-\Delta U = U^{2^*-1}$ in $\mathbb{R}^3$).

ii) se $N \geq 4$ e le velocità di concentrazione di u_λ^+ e u_λ^- sono comparabili (ovvero se il rapporto fra le loro norme L^∞ è compreso fra due costanti positive, per $\lambda \to 0^+$) allora ancora si ha che u_λ^+ e u_λ^- si concentrano in due punti distinti di Ω, per $\lambda \to 0^+$, avendo ciascuna il profilo limite di una "bubble" in $\mathbb{R}^N$.

Poiché in ii) si assume che u_λ^+ e u_λ^- esplodano con la stessa velocità, un'altra domanda sorge:

(Q2) Se $N \geq 4$, esistono soluzioni nodali di energia minima u_λ di 1 tali che u_λ^+ e u_λ^- si concentrano ed esplodono nello stesso punto, per $\lambda \to 0^+$? In caso affermativo, qual è il loro profilo limite? Esiste una qualche differenza fra il caso $N = 4, 5, 6$ e quello $N \geq 7$?

Nella tesi di dottorato, e nella relativa produzione scientifica abbiamo dato risposte alle questioni **(Q1)** e **(Q2)**.

Al fine di capire quale tipo di risultati potevamo aspettarci e di comprendere meglio il teorema di non esistenza di Atkinson, Brezis e Peletier abbiamo analizzato per prima cosa il comportamento asintotico di soluzioni radiali (nella palla) che cambiano segno aventi due zone nodali. Nel primo articolo [36] abbiamo considerato il caso $N \geq 7$, provando che:

(R1) La parte positiva, u_λ^+ e quella negativa u_λ^- si concentrano ed esplodono con velocità diverse nello stesso punto, che è il centro della palla, per $\lambda \to 0^+$, ed il profilo limite, sia di u_λ^+ che di u_λ^-, è quello di una bubble in $\mathbb{R}^N$. In altre parole la soluzione u_λ ha l'aspetto di una "tower of two bubbles".

In [38] abbiamo studiato i casi rimanenti, dimostrando che:
(R2) Se $N = 4, 5, 6$, $B \subset \mathbb{R}^N$ è una palla, e $\bar{\lambda} > 0$ è un certo valore limite legato all'equazione ordinaria associata a (1), si ha:

- se $N = 4, 5$, si ha $\bar{\lambda} = \lambda_1(B)$, assumendo senza perdita di generalità che $u_\lambda(0) > 0$ allora u_λ^+ si concentra ed esplode nel centro della palla, ed ha come profilo limite la standard bubble in $\mathbb{R}^N$, mentre u_λ^- converge a zero uniformemente, per $\lambda \to \bar{\lambda}$.
- se $N = 6$, allora $\bar{\lambda} \in (0, \lambda_1(B))$ e u_λ^+ si comporta come nel caso $N = 4, 5$ mentre u_λ^- converge all'unica soluzione positiva di (1) in B, per $\lambda \to \bar{\lambda}$.

Osserviamo che [36] fornisce, per $N \geq 7$, il primo esempio di soluzioni nodali con il profilo asintotico di una "tower of bubbles" per il problema di Brezis–Nirenberg. Il naturale sviluppo di **(R1)** è stato quello di cercare soluzioni di questo tipo in domini limitati (regolari) qualsiasi per $N \geq 7$.

Nel lavoro [39], usando un metodo di approssimazione basato sul metodo di riduzione finito dimensionale di Lyapunov–Schmidt, abbiamo costruito soluzioni nodali di tipo "bubble tower", per $N \geq 7$ e per domini limitati che soddisfano un'opportuna proprietà di simmetria (in realtà l'ipotesi di simmetria è solo volta a snellire la trattazione in quanto molto laboriosa dal punto di vista computazionale). Osserviamo inoltre che per ottenere il risultato (si veda il Teorema 1.1 di [39]) abbiamo introdotto una nuova idea basata sullo spezzamento del termine di resto. Infatti, se si cercano soluzioni del tipo "tower of bubbles", l'usuale metodo di riduzione finito-dimensionale porta a dei funzionali ridotti privi di punto critico.

Occorre sottolineare che in [39] l'ipotesi $N \geq 7$ non è solo tecnica, ma è necessaria. Infatti, nel successivo articolo [37], usando un'identità di Pohozaev ed opportune stime abbiamo provato che in domini generici non possono esistere soluzioni nodali del tipo "tower of bubbles" per $\lambda \to 0^+$, quando $N = 4, 5, 6$.

Come conseguenza dell'analisi svolta e dei risultati ottenuti, è ragionevole pensare che, in domini generali, le soluzioni nodali che si comportano come quelle radiali nella palla siano quelle del tipo "towers of two bubbles", per $\lambda \to 0^+$. Il risultato contenuto in [37] costituisce quindi la controparte del teorema di non esistenza di Atkinson, Brezis e Peletier per soluzioni nodali radiali nella palla, quando $N = 4, 5, 6$.

Tenuto conto di **(R2)**, è lecito aspettarsi che per $N = 4, 5$ e per un dominio limitato generico Ω, esistano soluzioni nodali tali che la parte positiva esplode e si concentra in un punto $x_0 \in \Omega$, mentre $u_\lambda^- \to 0$ per $\lambda \to \lambda_1(\Omega)$. Per $N = 6$ invece dovrebbero esistere soluzioni nodali u_λ il cui profilo è dato da una bubble (per u_λ^+) e una soluzione positiva di (1) per u_λ^-. I casi $N = 4, 5$ sono stati trattati nel lavoro [40]. In tale articolo, abbiamo dimostrato l'esistenza di soluzioni nodali di (1), per λ vicino a $\lambda_1(\Omega)$ e che sono la sovrapposizione a segno alterno di una bubble e della prima autofunzione di $-\Delta$ in $H^1_0(\Omega)$ moltiplicata per un fattore che va a zero per $\lambda \to \lambda_1$.

Soluzioni di questo tipo verificano una congettura di Atkinson Brezis e Peletier contenuta in [2] anche nel contesto più generale di domini limitati qualsiasi. Il caso $N = 6$ invece non è stato ancora investigato.

Problema di Plateau: il problema di Plateau è un problema classico ed ampiamente studiato nella letteratura: fissata una curva di Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ e una funzione $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, si cercano, se esistono, superfici del tipo disco $X : \overline{B} \to \mathbb{R}^3$ ($B \subset \mathbb{R}^2$ è il disco unitario) che si appoggiano su Γ e aventi curvatura media $H(X)$.

Molti sono i risultati concernenti superfici minime ($H \equiv 0$) o più in generale superfici di curvatura media costante, mentre meno vasta è la letteratura riguardante il caso di superfici di curvatura media prescritta variabile, dette H-superfici.

La formulazione analitica del problema è la seguente: una mappa $X\colon \overline{B} \to \mathbb{R}^3$ è detta H-superficie di tipo disco che si appoggia su Γ se $X \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(B, \mathbb{R}^3)$ soddisfa

$$\Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v \quad \text{in } B \tag{2}$$

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v \quad \text{in } B \tag{3}$$

$$X|_{\partial B}\colon \partial B \to \Gamma \text{ è una parametrizzazione (orientata) di } \Gamma. \tag{4}$$

E' noto che se X è una H-superficie, allora X ha curvatura media $H(X)$ nei punti regolari, ovvero dove $\nabla X \neq 0$.

Nel lavoro [19] abbiamo affrontato il problema dell'esistenza di H-superfici aventi sostegno in un cono di $\mathbb{R}^3$ e abbiamo affrontato la problematica della loro rappresentabilità come grafico radiale. Fissato un cono di apertura angolare $\beta \in (0, \pi/2)$,

$$\mathfrak{C}_\beta := \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > |p| \cos\beta\},$$

una curva di Jordan $\Gamma \subset \overline{\mathfrak{C}_\beta} \setminus \{0\}$, e una mappa $H\colon \overline{\mathfrak{C}_\beta} \to \mathbb{R}$, ci siamo posti il problema di fornire condizioni sulla funzione H affinché esistano H-superfici stabili con sostegno in $\overline{\mathfrak{C}_\beta} \setminus \{0\}$ (problema dell'ostacolo in $\overline{\mathfrak{C}_\beta}$). Il risultato ottenuto in [19] è il seguente:

Teorema 1. *Sia $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ e sia $H\colon \overline{\mathfrak{C}_\beta} \to \mathbb{R}$ una mappa di classe C^1, soddisfacente*

$$|H(p)||p| \leq \frac{\cos\beta}{2(1 + \cos\beta)} \quad \forall p \in \overline{\mathfrak{C}_\beta}\,. \tag{5}$$

Allora, per ogni curva di Jordan rettificabile $\Gamma \subset \overline{\mathfrak{C}_\beta} \setminus \{0\}$ esiste una H-superficie $X \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(B, \mathbb{R}^3)$ che si appoggia su Γ e contenuta in $\overline{\mathfrak{C}_\beta} \setminus \{0\}$. Inoltre si ha che $X(B) \subset \mathfrak{C}_\beta$.

La strategia impiegata è stata quella di minimizzare l'energia associata a (2) in un opportuno insieme di funzioni ammissibili. Ci limitiamo a sottolineare che una delle maggiori difficoltà della dimostrazione consiste nell'escludere che il minimo ottenuto tocchi il vertice del cono ostacolo $\partial\mathfrak{C}_\beta$.

La seconda problematica affrontata in [19] riguarda la rappresentabilità come grafico radiale delle H-superfici che si appoggiano su curve di Jordan Γ del tipo grafico radiale, ovvero della forma

$$\Gamma = \{f(q)q \mid q \in \partial\Omega\}, \tag{6}$$

dove $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^+$ e $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ è un dominio della sfera unitaria.

Ricordiamo per completezza anche la definizione geometrica di superficie di tipo grafico radiale.

Definizione 1. *Una superficie si dice di tipo grafico radiale (rispetto all'origine) se ogni semiretta uscente dall'origine interseca il sostegno della superficie in al massimo un punto.*

Il problema della rappresentabilità di H-superfici come grafico radiale è una naturale generalizzazione di quello della rappresentabilità come grafico cartesiano, problema ampiamente studiato nella letteratura: Radó in [44] ha provato che superfici minime che si appoggiano su una curva di Jordan che si proietta biettivamente sul bordo di un dominio convesso planare $D \subset \mathbb{R}^2$, sono rappresentabili come grafico cartesiano su D. Serrin in [46], Gulliver and Spruck in [32] hanno provato lo stesso risultato nel caso di superfici di curvatura media costante, ma con diverse ipotesi. Lo stesso risultato è stato provato da Sauvigny in [45] per superfici con curvatura media variabile aventi sostegno contenuto in un cilindro.

In [19] abbiamo provato che se Ω è un dominio di $\mathbb{S}^2$ che verifica un'opportuna condizione di convessità, Γ è della forma (6), H verifica (5) e la seguente condizione di monotonia

$$H(p) + \nabla H(p) \cdot p \geq 0 \quad \forall p \in \overline{\mathfrak{C}_\beta}\,, \tag{7}$$

allora la proiezione radiale di X (superficie di energia minima trovata nel Teorema 1) è un diffeomorfismo fra $\overline{B}$ e $\overline{\Omega}$, e $X(\overline{B})$ può essere rappresentato come grafico radiale. In particolare X è una superficie regolare.

Ricordiamo che Serrin ha provato in [47] l'esistenza di superfici di tipo grafico radiale sotto le seguenti assunzioni: Γ è della forma (6), dove Ω è un dominio regolare contenuto in un emisfero di $\mathbb{S}^N$, H è una funzione positiva e costante lungo i raggi di Ω, e tale che

$$\mathcal{H}_{\partial\Omega}(q) \geq \frac{N}{N-1} H(q) f(q) \quad \forall q \in \partial\Omega\,, \tag{8}$$

dove $\mathcal{H}_{\partial\Omega}$ è la curvatura media di $\partial\Omega$ (pensata come sottovarietà di Ω).

Se compariamo la condizione (5) con la (8) nel caso in cui Ω è una calotta sferica, risulta che (8) è meno restrittiva. Tuttavia, il nostro risultato è valido anche per funzioni di curvatura media H che cambiano segno e non costanti lungo i raggi di Ω.

Osserviamo inoltre che il nostro risultato è conseguenza di un risultato più generale provato in [19] valido per H-superfici (non necessariamente di energia minima). In questo caso si ottiene che la proiezione radiale è un omeomorfismo fra $\overline{B}$ e $\overline{\Omega}$, e che $X(\overline{B})$ può essere rappresentato come grafico radiale. La strategia adottata nella dimostrazione si basa sull'utilizzo della teoria del grado, sul principio del massimo, su un teorema classico di invertibilità globale e su un risultato di geometria differenziale noto come Teorema di Jordan-Schönflies.

Funzionali di tipo capillarità: consideriamo funzionali della forma

$$F(u) = \int_{\mathbb{S}^2} (1 + Q(u) \cdot \nu)\, d\Sigma\,, \tag{9}$$

dove $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale liscio assegnato, con $|Q|_\infty < 1$, ν e $d\Sigma$ sono, rispettivamente, la mappa di Gauss e l'elemento di area di $\mathbb{S}^2$ indotti da $u : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$. Questi funzionali sono noti come "funzionali di tipo capillarità" (si veda [33]) e possono essere visti come una correzione del funzionale di area con un termine non omogeneo. La limitazione $|Q|_\infty < 1$ garantisce la validità di disuguaglianze isoperimetriche per (9) (si veda [18]).

In [20] ci siamo occupati di trovare punti critici di (9) in $H^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ rispetto a variazioni che preservano il volume.

Ricordiamo che i funzionali (9) dipendono solo dalla divergenza di Q, quindi si formulano ipotesi solo su $K = \operatorname{div} Q$. Fissata $K\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ regolare, supponiamo che essa verifichi:
(K_1) $\sup_{p\in\mathbb{R}^3} |K(p)p| =: k_0 < 2$ per ogni $p \in \mathbb{R}^3$.
(K_2) $K(p)p \to 0$ per $|p| \to \infty$.
Allora è possibile costruire un campo vettoriale $Q_K \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tale che $\operatorname{div} Q_K = K$ su $\mathbb{R}^3$ e soddisfacente le proprietà seguenti:
(Q_1) $|Q_K|_\infty < 1$,
(Q_2) $|Q_K(p)| \to 0$ per $|p| \to \infty$.

In [18] sono stati studiati i problemi dell'esistenza e non esistenza di punti critici corrispondenti a minimi per i problemi isovolumetrici

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_K(t) &:= \inf\left\{\mathcal{F}_K(u) \mid u \in H^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3),\ \mathcal{V}(u) = t\right\} \\ \text{dove} \quad \mathcal{F}_K(u) &:= \int_{\mathbb{S}^2} (1 + Q_K(u)\cdot\nu)\, d\Sigma \end{aligned} \tag{10}$$

e $\mathcal{V}(u)$ è il funzionale di volume algebrico, definito come l'unica estensione in $H^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ del funzionale integrale

$$\mathcal{V}(u) = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{S}^2} u\cdot\nu\, d\Sigma \quad \text{per } u \in H^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3) \cap L^\infty.$$

Ricordiamo il seguente risultato provato in [18], sul problema (10) per $t > 0$:

Teorema 2. *Sia $K \in C^1(\mathbb{R}^3)$ che soddisfa (K_1)–(K_2). Inoltre si assuma che*

$$K(p) < 0 \quad \textit{per qualche } p \in \mathbb{R}^3 \tag{11}$$

e che la costante k_0 che appare in (K_1) soddisfi

$$2^{2/3}(2 + k_0) < (2 - k_0)^2\,. \tag{12}$$

Allora esiste $t_+ > 0$ tale che per ogni $t \in (0, t_+)$ il problema di minimizzazione (10) ammette minimo.

Il valore t_+ può essere caratterizzato nel modo seguente

$$t_+ := \sup\left\{t \geq 0 \mid K \leq 0 \text{ e } K \not\equiv 0 \text{ in qualche palla di raggio } \sqrt[3]{3t/4\pi}\right\}.$$

In particolare si ha $t_+ = +\infty$ se $K \leq 0$ in $\mathbb{R}^3$ (oppure se $K \leq 0$ in un cono aperto).

Il segno di K gioca un ruolo importante nella questione dell'esistenza o meno di estremali di (10). Infatti in [18] è stato provato che

Teorema 3. *Sia $K \in C^0(\mathbb{R}^3)$ che verifica (K_1)–(K_2). Se*

$$K(p) > 0 \quad \textit{per ogni } p \in \mathbb{R}^3, \tag{13}$$

allora esiste $\tau > 0$ tale che per ogni $t \in (0, \tau)$ il problema di minimizzazione (10) non ha minimo. Inoltre $S_K(t) = S_0 t^{2/3}$, dove $S_0 = \sqrt[3]{36\pi}$ è la costante isoperimetrica.

Poiché quando $K > 0$ non esistono minimi per (10), ci siamo posti il problema di cercare (se esistono) estremali vincolati al volume diversi dai minimi quando $K > 0$. Il principale risultato di [20] è il seguente:

Teorema 4. *Sia $K \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ che verifica (K_1)-(K_2). Inoltre si assuma (13) e che la costante k_0 che appare in (K_1) soddisfi*

$$k_0 < 2(2^{1/3} - 1). \tag{14}$$

Allora esiste una successione $t_n \to 0^+$ tale che l'insieme dei punti critici vincolati di $\mathcal{F}_K$ a volume t_n, denotato con $Crit_{\mathcal{F}_K}(t_n)$, è non vuoto.

La dimostrazione del teorema precedente è basata su un argomento di tipo minimax ispirato al lavoro [4], e sulla teoria del grado. Una significativa difficoltà tecnica risiede nel dimostrare l'esistenza di successioni di Palais-Smale vincolate per $\mathcal{F}_K$ al livello di minimax costruito nella dimostrazione, infatti in generale $\mathcal{F}_K$ non è un funzionale C^1 e neppure differenziabile secondo Gateaux.

Osserviamo infine che i funzionali capillarità sono rilevanti non solo perché costituiscono un modello per fenomeni fisici ma anche per la loro connessione con il problema delle H-bolle. Infatti, punti critici vincolati al volume per $\mathcal{F}_K$ parametrizzano superfici chiuse aventi volume t e curvatura media $H(p) = \frac{1}{2}(K(p) - \lambda)$, dove $K = \operatorname{div} Q$ è prescritta, e λ è una costante corrispondente al moltiplicatore di Lagrange. Da questo punto di vista il Teorema 4 permette di dimostrare esistenza di H-bolle sotto ipotesi meno restrittive rispetto ai lavori [21, 22, 18].

Problema di Plateau per grafici radiali nello spazio di Lorentz-Minkowski: lo spazio di Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{N+1}$ è definito come lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{N+1}$ equipaggiato con la forma bilineare simmetrica

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \ldots + x_Ny_N - x_{N+1}y_{N+1},$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_{N+1}), y = (y_1, \ldots, y_{N+1})$. La forma bilineare $\langle \cdot, \cdot\rangle$ è non degenere ed ha segnatura $(N, 1)$. I vettori di $\mathbb{R}^{N+1}$ sono classificati in tre tipi:

Definizione 2. *Un vettore $v \in \mathbb{R}^{N+1}$ è detto:*

- *di tipo spazio se $\langle v, v\rangle > 0$ oppure $v = 0$;*
- *di tipo tempo se $\langle v, v\rangle < 0$;*
- *di tipo luce se $\langle v, v\rangle = 0$ e $v \neq 0$.*

Il modulo di v è definito da $|v| := \sqrt{|\langle v, v\rangle|}$.

Dato uno spazio vettoriale V di $\mathbb{R}^{N+1}$, si considera la metrica indotta $\langle \cdot, \cdot\rangle_V$ definita in modo naturale da

$$\langle v, w\rangle_V := \langle v, w\rangle, \ v, w \in V.$$

In accordo con la Definizione 2 classifichiamo i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{N+1}$ nel seguente modo:

- V è di tipo spazio se la metrica indotta è definita positiva;
- V è di tipo tempo se la metrica indotta ha indice uno;
- V è di tipo luce se la metrica indotta è degenere.

Definizione 3. *Sia $M \subset \mathbb{R}^{N+1}$ una ipersuperficie, diciamo che M è di tipo spazio (rispettivamente di tipo tempo, luce) se per ogni $p \in M$ lo spazio vettoriale T_pM è di tipo spazio (rispettivamente di tipo tempo, luce).*

Un modello conveniente per descrivere grafici radiali (si veda (1) per la definizione) di tipo spazio nello spazio di Lorentz-Minkowski è lo spazio iperbolico:

$$\mathbb{H}^N := \{(x_1, \ldots, x_{N+1}) \in \mathbb{L}^{N+1};\ x_1^2 + \ldots + x_N^2 - x_{N+1}^2 = -1,\ x_{N+1} > 0\}.$$

Se $\Omega \subset \mathbb{H}^N$ è un dominio dello spazio iperbolico denotiamo con $\mathcal{C}_\Omega$ il cono in $\mathbb{R}^{N+1}$ generato da Ω. Data $H \in C^1(\overline{\mathcal{C}_\Omega})$ cerchiamo ipersuperfici di tipo spazio parametrizzate da mappe $X : \overline{\Omega} \to \overline{\mathcal{C}_\Omega}$ della forma $X(q) = e^{u(q)}q,\ q \in \overline{\Omega}$, dove $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, e tali che la curvatura media di X in ogni punto regolare $q \in \Omega$ è $H(X(q))$. Per semplicità consideriamo il caso di dato al bordo $u = 0$ su $\partial\Omega$. L'equazione che deve soddisfare u è la seguente:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_{\mathbb{H}^N}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}\right)+\dfrac{N}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}=Ne^uH(e^uq) & \text{in } \Omega, \\ |\nabla u|<1 & \text{in } \Omega, \\ u=0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

dove $\mathrm{div}_{\mathbb{H}^N}$ denota l'operatore divergenza rispetto alla metrica standard di $\mathbb{H}^n$. Il risultato principale del nostro lavoro [12] è il seguente:

Teorema 5. *Sia $\alpha \in (0,1)$, e siano $0 < r_1 \leq 1 \leq r_2$, con $r_1 \neq r_2$, sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{H}^N$ con bordo di classe $C^{3,\alpha}$, e soddisfacente una condizione di sfera geodetica esterna. Posto $C_{\overline{\Omega}}(r_1,r_2) := \{p = \rho q \in \mathbb{L}^{N+1};\ q \in \overline{\Omega},\ r_1 \leq \rho \leq r_2\}$, sia $H \in C^{1,\alpha}(C_{\overline{\Omega}}(r_1,r_2))$ tale che:*

i) $H(r_1q) > r_1^{-1}$ e $H(r_2q) < r_2^{-1}$ per ogni $q \in \overline{\Omega}$.

ii) $\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda H(\lambda q)) \leq 0$, per ogni $q \in \overline{\Omega}$, $\lambda \in [r_1,r_2]$.

Allora, esiste un'unica soluzione di (15) *il cui grafico radiale associato è contenuto in $\mathcal{C}_{\overline{\Omega}}(r_1,r_2)$.*

La dimostrazione del Teorema 5 si basa su una variante del Teorema punto fisso di Leray–Schauder, su fini stime a priori. Di particolare rilievo sono le stime a priori per il gradiente, all'interno e al bordo, ottenute sfruttando le ipotesi su H e Ω, la geometria degli spazi di Lorentz-Minkowski e il metodo di troncamento di Stampacchia. Occorre poi evidenziare che il nostro risultato copre uno spettro più ampio di funzioni H rispetto a [7] in quanto nessuna ipotesi di omogeneità su H è richiesta nel Teorema 5, come pure che nessuna condizione di convessità è imposta per Ω, in contrasto con quanto avviene nel caso euclideo (si vedano [19, 44, 49]).

Proprietà qualitative ed asintotiche delle soluzioni nodali di problemi ellittici semilineari non locali: sia $s \in (0,1)$, $\lambda > 0$, $N > 2s$, e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato regolare. Consideriamo il problema di Brezis–Nirenberg frazionario, ovvero:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u + |u|^{2_s^*-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{16}$$

dove $2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$ è l'esponente critico per l'immersione di $\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^N)$ in $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$, e $(-\Delta)^s$ è il Laplaciano frazionario, definito come

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{N,s} P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}y = C_{N,s} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}y,$$

dove la costante $C_{N,s}$ è data da

$$C_{N,s} = \frac{2^{2s}\Gamma\left(\frac{N}{2}+s\right)}{\pi^{\frac{N}{2}}|\Gamma(-s)|}.$$

Denotiamo con $X_0^s(\Omega)$ lo spazio di Sobolev delle funzioni $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tali che $u = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, equipaggiato con la norma

$$\|u\|_s^2 = \frac{C_{N,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

il cui prodotto scalare associato è

$$(u,v)_s = \frac{C_{N,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Nel lavoro [27], scritto in collaborazione con il Dott. G. Cora (Università di Torino), ci siamo occupati di descrivere le proprietà qualitative ed asintotiche delle soluzioni nodali radiali di energia minima per il problema (16) nella palla. Più precisamente ci siamo occupati delle seguenti questioni:

Problema a): Sia $B_R \subset \mathbb{R}^N$ la palla di centro R centrata nell'origine, dimostrare la proprietà seguente

$(\mathcal{P})$ se u è una soluzione radiale nodale del Problema (16) in B_R e $u(0) = 0$ allora $u \equiv 0$.

Problema b): Determinare il numero di componenti connesse del complementare dell'insieme nodale, ed il numero di cambi di segno, di soluzioni radiali che cambiano segno di energia minima di (16) nella palla, quando λ è vicino a zero.

Ricordiamo che $u = u_{s,\lambda}$ è detta soluzione nodale di energia minima per (16) se $I(u) = \inf_{\mathcal{M}} I$, dove I è il funzionale energia associato a (16) e $\mathcal{M}$ è l'insieme di Nehari nodale, ovvero

$$\mathcal{M} = \{w \in X_0^s(\Omega) \mid w^{\pm} \not\equiv 0, I'(w)[w^{\pm}] = 0\}.$$

Problema c): Determinare il profilo asintotico di soluzioni nodali radiali di energia minima del Problema (16) nella palla, per $\lambda \to 0^+$.

In [27], studiando il comportamento asintotico di opportuni riscalamenti delle soluzioni abbiamo provato che per ogni $s > 1/2$ esiste un valore $\bar{\lambda}_s > 0$ tale che per ogni $\lambda \in (0, \bar{\lambda}_s)$ ogni soluzione $u_{s,\lambda}$ nodale radiale di energia minima di (16) in B_R verifica la proprietà $(\mathcal{P})$.

Per quanto concerne il Problema b), sfruttando la radialità delle soluzioni, studiando le proprietà dell'insieme nodale dell'estensione di Caffarelli–Silvestre delle soluzioni, utilizzando metodi topologici basati sul teorema della curva di Jordan, il principio del massimo ed un nuovo complesso risultato tecnico, abbiamo ottenuto:

Teorema 6. *Siano $N > 6s$, $s \in (0,1)$ e $R > 0$. Esiste un numero $\hat{\lambda}_s > 0$ tale che per ogni $\lambda \in (0, \hat{\lambda}_s)$ ogni soluzione radiale nodale di energia minima $u_{s,\lambda}$ di (16) in B_R cambia segno al massimo due volte. Inoltre, gli zeri di $u_{s,\lambda} = u_{s,\lambda}(r)$ in $(0, R)$ coincidono con i nodi, ovvero con i cambi di segno di $u_{s,\lambda}$. Più precisamente, una ed una sola delle seguenti vale:*

(1) se $u_{s,\lambda}$ cambia segno due volte allora $u_{s,\lambda}$ si annulla in $[0, R)$ solo nei nodi,
(2) se $u_{s,\lambda}$ cambia segno solo una volta allora $u_{s,\lambda}$ si annulla in $(0, R)$ solo nel nodo ed eventualmente nell'origine.

Teorema 7. *Sia $N \geq 7$ e sia $R > 0$. Esiste $\overline{\lambda} > 0$ tale che per ogni $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$ esiste $\bar{s} \in (0,1)$ tale che per ogni $s \in (\bar{s}, 1)$ ogni soluzione radiale nodale di energia minima $u_{s,\lambda}$ di (16) in B_R cambia segno esattamente una volta.*

Occorre sottolineare che, in virtù delle interazioni non locali fra le componenti nodali, i precedenti risultati non sono ottenibili con meri argomenti energetici come nel caso locale (si veda la dimostrazione del Teorema 1.1 in [9]). Osserviamo che per quanto concerne le proprietà di monotonia delle soluzioni radiali nella palla di (16) il metodo dei "moving planes" frazionario è applicabile solo nel caso di soluzioni positive (si veda [25]). Inoltre, il principio del massimo forte (si veda [17]) non permette di escludere che soluzioni nodali di (16), non negative in un intorno di un punto, si annullino nel punto (si veda l'introduzione di [27] per maggiori dettagli). Questo implica che, in generale, per problemi frazionari governati dal Laplaciano frazionario non esista una corrispondenza elementare fra cambi di segno e numero di componenti connesse del complementare dell'insieme nodale.

Per quanto riguarda il Problema c) in [27] abbiamo provato che il profilo limite delle soluzioni radiali nella palla che cambiano segno esattamente una volta è quello di una "tower of two bubbles", per $\lambda \to 0^+$.

Nel recente lavoro [28] abbiamo esteso questi risultati al caso di nonlinearità leggermente sottocritiche, per tutti gli $s \in (0,1)$ e senza ipotesi aggiuntive sul numero di cambi di segno.

Regolarità per il minimo dell'energia elettrostatica di Born-Infeld: è ben noto che, a meno di una scelta opportuna delle costanti, le equazioni di Maxwell nel caso elettrostatico nel vuoto portano all'equazione di Poisson

$$-\Delta u = \rho, \tag{17}$$

dove ρ rappresenta una densità di carica. Se $\rho = \delta_0$, dove δ_0 è la delta di Dirac nell'origine, la soluzione di (17) è data da $u(x) = 1/(4\pi|x|)$ e la sua energia è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \, dx = +\infty.$$

Anche quando $\rho \in L^1(\mathbb{R}^3)$, che è un caso fisicamente rilevante, l'equazione (17) ammette soluzioni di energia infinita (si veda [30]). Da un punto di vista fisico questo significa che il modello di Maxwell viola il principio di finitezza dell'energia. Per evitare questo fenomeno Born e Infeld in [14, 15] proposero un nuovo modello basato sulla modificazione della densità Lagrangiana di Maxwell (si veda anche [11, Sect.1]). A meno di una scelta opportuna delle costanti, la controparte dell'equazione di Poisson è la seguente:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}\right) = \rho.$$

L'operatore Q^-, definito da

$$Q^-(u) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}\right), \tag{18}$$

appare naturalmente anche in teoria delle stringhe (si veda [31]), e in relatività, dove Q^- rappresenta l'operatore di curvatura media nello spazio di Lorentz-Minkowski $(\mathbb{L}^{N+1}, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{L}^{N+1}})$ (si vedano [12, 6, 26, 48]).

Sia $N \geq 3$ e consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}\right) = \rho \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \end{cases} \tag{$\mathcal{BI}$}$$

Il problema ($\mathcal{BI}$) è di natura variazionale. Infatti, consideriamo come "spazio funzionale" l'insieme convesso

$$\mathcal{X} = D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap \{u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N);\ |\nabla u|_\infty \leq 1\}, \tag{19}$$

equipaggiato con la norma

$$\|u\|_{\mathcal{X}} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2},$$

dove $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ è il completamento di $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ rispetto alla norma di cui sopra. Ricordiamo che ogni elemento di $\mathcal{X}$ si annulla all'infinito, che $\mathcal{X}$ è debolmente chiuso e gode di buone proprietà di immersione (in particolare $\mathcal{X}$ si immerge con continuità in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, [11, Sect. 2]). Sia $\mathcal{X}^*$ il duale di $\mathcal{X}$ e si denoti con $\langle \cdot,\cdot \rangle$ l'accoppiamento di dualità.

Fissata $\rho \in \mathcal{X}^*$, l'equazione ($\mathcal{BI}$) è formalmente l'equazione di Eulero-Lagrange relativa al funzionale $I_\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dato da

$$I_\rho(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 - \sqrt{1 - |\nabla u|^2}\right) dx - \langle \rho, u \rangle. \tag{20}$$

Poiché I_ρ non è regolare nei punti $u \in \mathcal{X}$ tali che $|\nabla u|_\infty = 1$ occorre distinguere fra le nozioni di punto critico in senso debole e la nozione di soluzione debole:

Definizione 4. *Diciamo che $u_\rho \in \mathcal{X}$ è un* punto critico in senso debole *per il funzionale I_ρ se* 0 *appartiene al sottodifferenziale di I_ρ in u_ρ (si veda* [11, Sect. 2]*).*

Definizione 5. *Diciamo che $u_\rho \in \mathcal{X}$ è una* soluzione debole *di* ($\mathcal{BI}$) *se per ogni $\psi \in \mathcal{X}$ si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla u_\rho \cdot \nabla \psi}{\sqrt{1 - |\nabla u_\rho|^2}} \, dx = \langle \rho, \psi \rangle. \tag{21}$$

Osserviamo che nel nostro contesto la definizione di punto critico in senso debole è equivalente a richiedere che u_ρ sia un minimo per I_ρ (si veda [11, Sect. 2]), e se ρ è una distribuzione, la formulazione debole di (21) si estende ad ogni $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Il funzionale I_ρ è limitato dal basso, coercivo, debolmente semicontinuo inferiormente e strettamente convesso. Dai metodi diretti del Calcolo delle Variazioni esiste un unico minimo (si veda [11, Proposition 2.3]), inoltre ogni soluzione debole di ($\mathcal{BI}$) coincide con il minimo (si veda [11, Proposition 2.6]). Alla luce di questo, una domanda naturale sorge:

Q1: "Se u_ρ è un minimo, è u_ρ soluzione debole di ($\mathcal{BI}$)?"

Diversi autori si sono occupati della questione (si vedano [30, 34]) ma sembra molto difficile rispondervi in piena generalità sotto la mera assunzione $\rho \in \mathcal{X}^*$. In alcuni casi particolari però la risposta a **Q1** è affermativa: quando $\rho \in \mathcal{X}^*$ è radialmente distribuita o quando $\rho \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{X}^*$ (si vedano [11, Theorem 1.4, Theorem 1.5]). Nel caso di una distribuzione data dalla sovrapposizione finita di cariche puntiformi, ovvero $\rho = \sum_{i=1}^k a_i \delta_{x_i}$, dove $a_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, \ldots, k$, allora il minimo u_ρ è soluzione debole ma lontano dalle cariche, ossia u_ρ risolve debolmente

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}}\right) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Inoltre, u_ρ è soluzione classica di $\mathbb{R}^N \setminus \Gamma$, dove Γ è l'insieme dato dall'unione dei segmenti aventi come estremi le cariche $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Se le intensità $|a_i|$ sono sufficientemente piccole allora u_ρ è soluzione classica in $\mathbb{R}^N \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$, è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{x_1, \ldots, x_k\})$, strettamente di tipo spazio in tale insieme (ovvero $|\nabla u_\rho| < 1$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$) e $\lim_{x \to x_i} |\nabla u_\rho| = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, k$ (si vedano [34], [11, Theorem 1.6]).

Un'altra problematica riguarda la regolarità del minimo u_ρ, quando il dato ρ appartiene a L^p, $p \geq 1$. Gli unici risultati noti in letteratura riguardano il caso speciale delle funzioni radiali: se $\rho \in L^p_{rad}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{X}^*$, $p \geq 1$ allora $u_\rho \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ e se in aggiunta $\rho \in L^p_{rad}(B_\delta(0)) \cap L^s(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{X}^*$, per $s \geq 1$, $p \geq N$ ed una qualche palla $B_\delta(0)$ di raggio $\delta > 0$, allora $u_\rho \in C^1(\mathbb{R}^N)$ (si veda [11, Theorem 3.2]). Quando invece $\rho \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{X}^*$ è noto che il minimo u_ρ è localmente di classe $C^{1,\alpha}$, e se $\rho \in C^k(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{X}^*$ allora $u_\rho \in C^{k+1}(\mathbb{R}^N)$ (si vedano [11, 6]). Tuttavia, tutte le dimostrazioni di questi risultati dipendono in modo sostanziale dalla radialità (nel primo caso), e dalla locale limitatezza di ρ (nel secondo caso).

È interessante quindi chiedersi se per $\rho \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{X}^*$, $p \geq 1$, il minimo u_ρ appartenga almeno a qualche spazio $W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, per un qualche $q \geq 1$, inoltre, quando $p > N$, è naturale domandarsi se sia possibile ottenere, in analogia al caso classico dell'equazione di Poisson, la regolarità $C^{1,\alpha}$ locale. Più precisamente:

Q2: "Se $\rho \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{X}^*$, con $p > N$ è vero che il minimo u_ρ appartiene a $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, per un qualche $\alpha \in (0, 1)$?"

Nel nostro lavoro [13] ci siamo occupati di fornire una prima risposta a **Q1**, **Q2**. I risultati ottenuti sono i seguenti: sia $N \geq 3$, denotiamo con $|\cdot|_q$ la norma standard in $L^q(\mathbb{R}^N)$ e con $2_* := (2^*)' = \frac{2N}{N+2}$ l'esponente coniugato di $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Teorema 8. *Se $\rho \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^m(\mathbb{R}^N)$, con $p > 2N$, $m \in [1, 2_*]$ allora $u_\rho \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema 9. *Sia $p > 2N$ e sia $m \in [1, 2_*]$. Esiste una costante $c = c(N, m, p) > 0$ tale che per ogni $\rho \in L^m(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ che soddisfa $|\rho|_m + |\rho|_p \leq c$ si ha che il minimo u_ρ è soluzione debole di $(\mathcal{BI})$, è strettamente di tipo spazio (ovvero $|\nabla u_\rho|_\infty < 1$), e $u \in C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, per un qualche $\alpha \in (0, 1)$.*

Osserviamo che questi risultati non possono essere dedotti in modo diretto da teoremi noti in letteratura in merito alla regolarità dei minimi di funzionali e delle soluzioni di equazioni ellittiche in forma divergenza (si vedano ad esempio [10, 29, 35, 42, 43]). Infatti, la cosiddetta "Teoria di Calderón-Zygmund nonlineare" è modellata sul q-Laplaciano come prototipo, per $q > 2 - \frac{1}{N}$, dove $\Delta_q u := \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)$. Ma l'operatore Q^- ha un diverso comportamento (singolare) e non soddisfa le ipotesi strutturali presenti in [35, (1.2)].

References

[1] Adimurthi, S. L. Yadava,*Elementary proof of the nonexistence of nodal solutions for the semilinear elliptic equations with critical Sobolev exponent*, Nonlinear Anal. **14**, no. 9, 785–787 (1990).

[2] F. V. Atkinson, H. Brezis, L. A. Peletier, *Solutions d'equations elliptiques avec exposant de Sobolev critique qui changent de signe*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **306**, no. 16, 711–714 (1988).

[3] F. V. Atkinson, H. Brezis, L. A. Peletier, *Nodal solutions of elliptic equations with critical Sobolev exponents*, J. Differential Equations **85**, no. 1, 151–170 (1990).

[4] A. Bahri, Y. Y. Li, *On a Min-Max Procedure for the Existence of a Positive Solution for Certain Scalar Field Equations in $\mathbb{R}^N$*, Rev. Mat. Iberoam. **1–2**, 1–15 (1990).

[5] P. Baroni, *Riesz potential estimates for a general class of quasilinear equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **53** (3-4) (2015), 803–846.

[6] R. Bartnik and L. Simon, *Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature*, Comm. Math. Phys. **87**, 131–152 (1982).

[7] P. Bayard, *Entire spacelike radial graphs in the Minkowski space, asymptotic to the light-cone, with prescribed scalar curvature*, Ann. I. H. Poincaré, **26**, 903–915 (2009).

[8] M. Ben Ayed, K. El Mehdi, F. Pacella, *Blow-up and nonexistence of sign-changing solutions to the Brezis-Nirenberg problem in dimension three*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **23**, no. 4, 567–589 (2006).

[9] M. Ben Ayed, K. El Mehdi, F. Pacella,*Blow-up and symmetry of sign-changing solutions to some critical elliptic equations*, Journal of Differential Equations **230**, 771-795 (2006).

[10] M. Bildhauer, M. Fuchs, *$C^{1,\alpha}$-solutions to non-autonomous anisotropic variational problems*, Calc. Var. Part. Diff. Eq. **24** (2005), 309–340.

[11] D. Bonheure, P. D'avenia, A. Pomponio, *On the Electrostatic Born–Infeld Equation with Extended Charges*, Comm. Math. Phys. **346** (2016), 877–906.

[12] D. Bonheure, A. Iacopetti, *Spacelike radial graphs of prescribed mean curvature in the Lorentz-Minkowski space*, Analysis & PDE, Vol. 12, No. 7, 1805-1842 (2019), doi:10.2140/apde.2019.12.1805.

[13] D. Bonheure, A. Iacopetti, *On the regularity of the minimizer of the electrostatic Born-Infeld energy*, Arch. Ration. Mech. Anal. 232, 697–725 (2019).

[14] M. Born, L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, Nature **132** (1933), 1004.

[15] M. Born, L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **144** (1934), 425–451.

[16] H. Brezis, L. Nirenberg,*Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure. Appl. Math. **36**, 437–477 (1983).

[17] X. Cabré, Y. Sire, *Nonlinear equations for fractional Laplacians, I: Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates*,Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **31**, 23–53 (2014).

[18] P. Caldiroli, *Isovolumetric and Isoperimetric Problems for a Class of Capillarity Functionals*, Arch. Ration. Mech. Anal., **218**, 331–361 (2015).

[19] P. Caldiroli, A. Iacopetti, *Existence of stable H-surfaces in cones and their representation as radial graphs*, Calculus of Var. and PDE's, 55: 131. doi:10.1007/s00526-016-1074-8 (2016).
[20] P. Caldiroli, A. Iacopetti, *Existence of isovolumetric $\mathbb{S}^2$-type stationary surfaces for capillarity functionals*, Revista Matemàtica Iberoamericana 34, no. 4, 1685–1709 (2018).
[21] P. Caldiroli, R. Musina, *Existence of minimal H-bubbles*, Commun. Contemp. Math. **4**, 177–209 (2002).
[22] P. Caldiroli, R. Musina, *Bubbles with prescribed mean curvature: the variational approach*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A **74**, 2985–2999 (2011).
[23] A. Capozzi, D. Fortunato, G. Palmieri, *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent,* Ann. Inst. H. Poincaré **2**, no. 6, 463–470 (1985).
[24] G. Cerami, S. Solimini, M. Struwe, *Some Existence Results for Superlinear Elliptic Boundary Value Problems Involving Critical Exponents*, Journal of Functional Analysis 69, 289–306 (1986).
[25] W. Chen, C. Li, Y. Li, *A direct method of moving planes for the fractional Laplacian*, Advances in Mathematics **308**, 404–437 (2017).
[26] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math. **104**, 407–419 (1976).
[27] G. Cora, A. Iacopetti *On the structure of the nodal set and asymptotics of least energy sign-changing radial solutions of the fractional Brezis-Nirenberg problem*, Nonlinear Analysis 176, 226–271 (2018).
[28] G. Cora, A. Iacopetti, *Sign-changing bubble-tower solutions to fractional semilinear elliptic problems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-A, 39(10), 6149–6173 (2019), doi:10.3934/dcds.2019268.
[29] E. DiBenedetto, J.J. Manfredi, *On the higher integrability of the gradient of weak solutions of certain degenerate elliptic systems*, Amer. J. Math. **115** (1993) 1107–1134.
[30] D. Fortunato, L. Orsina, L. Pisani, *Born-Infeld type equations for electrostatic fields*, J. Math. Phys. **43**, 5698–5706 (2002).
[31] G.W. Gibbons, *Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes*, Nuclear Phys. B **514** (1998), 603–639.
[32] R. Gulliver, J. Spruck, *Surfaces of constant mean curvature which have a simple projection*, Math. Z. **129**, 95–107 (1972).
[33] S. Hildebrandt, H. von der Mosel, *Conformal representation of surfaces, and Plateau's problem for Cartan functionals*, Riv. Mat. Univ. Parma (7) 4*, 1–43 (2005).
[34] M.K.-H. Kiessling, *On the quasi-linear elliptic PDE* $-\nabla\cdot(\nabla u/\sqrt{1-|\nabla u|^2}) = 4\pi\sum_k a_k\delta_{s_k}$ *in physics and geometry*, Comm. Math. Phys. **314** (2012), 509–523.
[35] T. Kuusi, G. Mingione, *Universal potential estimates*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 4205–4269.
[36] A. Iacopetti, *Asymptotic analysis for radial sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem,* Annali di Matematica Pura ed Applicata, Volume 194, Issue 6, 1649–1682 (2015).
[37] A. Iacopetti, F. Pacella, *A nonexistence result for sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem in low dimensions*, J. Diff. Eq., **258**, no. 12, 4180–4208 (2015).
[38] A. Iacopetti, F. Pacella, *Asymptotic analysis for radial sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem in low dimensions*, Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Appl., Springer, Vol. 86, 325–343 (2015).
[39] A. Iacopetti, G. Vaira, *Sign-changing tower of bubbles for the Brezis-Nirenberg problem*, Commun. Contemp. Math. **18**, 1550036 (2016).
[40] A. Iacopetti, G. Vaira, *Sign-changing blowing-up solutions for the Brezis–Nirenberg problem in dimensions four and five*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. XVIII, Issue 1, 1–38 (2018), DOI: 10.2422/2036-2145.201602_003).
[41] D. Mugnai, *Coupled Klein-Gordon and Born-Infeld type equations: looking for solitary waves*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci, **460** (2004), 1519–1527.
[42] P. Marcellini, *Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non standard growth conditions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **105** (1989), 267–284.
[43] P. Marcellini, *Everywhere regularity for a class of elliptic systems without growth conditions*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **23** (4) (1996), 1–25.
[44] T. Radó, *On the Problem of Plateau*, Berlin: Julius Springer (1933) (reprint: New York: Springer 1971).
[45] F. Sauvigny, *Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene*, Math. Z. **180**, 41–67 (1982).
[46] J. Serrin, *On the surfaces of constant mean curvature which span a given space curve*, Math. Z. **112**, 77–88 (1969).
[47] J. Serrin, *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables*, R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **264**, 413–496 (1969).
[48] A. Treibergs, *Entire Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski Space*, Invent. math **66**, 39–56 (1982).
[49] E. Tausch, *The n-dimensional least area problem for boundaries on a convex cone*, Arch. Rat. Mech. Anal. **75**, 407–416 (1981).

Data 30/07/2019 Luogo Roma