

Simone Naldi

*XLIM - Université de Limoges
123 Avenue Albert Thomas
87060 Limoges, Francia*

✉ *simone.naldi@unilim.fr*
☎ *(+33) 5 87 50 67 78*

Gentili membri della commissione

Il mio nome è Simone Naldi, sono attualmente ricercatore universitario (Maître de conférences) dell'Università di Limoges, Francia, in servizio dal 1 settembre 2017. Sono membro del gruppo di ricerca di Algebra e Geometria Computazionale dell'Istituto XLIM.

La mia attività di ricerca si situa tra la geometria algebrica e l'algebra computazionale. Nella tesi di dottorato mi sono interessato allo sviluppo di metodi algebrici e di algoritmi efficaci per sistemi polinomiali con struttura determinantale, alla geometria delle loro varietà associate, ed alle applicazioni in geometria algebrica convessa (studio di simmetroidi e spettraedri) ed in ottimizzazione polinomiale (in particolare semidefinita). Le due linee di ricerca più importanti della mia attività recente riguardano lo studio di ipersuperfici iperboliche e delle loro rappresentazioni determinanti, e lo sviluppo di algoritmi rapidi per il calcolo di sizigie e di risoluzioni di ideali polinomiali o, più in generale, di moduli sull'anello dei polinomi in più variabili.

La mia attività di insegnamento si inserisce nell'offerta formativa prevista dal corso di laurea triennale in Matematica, dai due corsi di laurea magistrale in Matematica Cryptis (matematica per la crittologia) e Acsyon (matematica applicata), e da altri corsi della Facoltà di Scienze dell'Università di Limoges (principalmente Informatica, Fisica e Scienze della vita). Sono responsabile, tra gli altri, di corsi di algebra lineare, algebra commutativa, computer algebra per matematici ed intervengo in corsi per non matematici. Parte dei miei insegnamenti, anche precedentemente alla crisi sanitaria, sono stati dispensati online per studenti internazionali.

Questo dossier rappresenta la mia candidatura per una posizione di ricercatore a tempo determinato in geometria presso il Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques" dell'Università degli Studi di Milano, in risposta al bando che è stato recentemente pubblicato (Cod. 4773). Troverete un curriculum vitae completo, contenente la lista delle pubblicazioni ed il contatto di colleghi internazionali per delle lettere di referenza, la descrizione di un programma di ricerca per il prossimo triennio, ed una descrizione della mia attività di ricerca ed insegnamento. Inoltre, ho allegato le due review ufficiali sulla mia tesi di dottorato, redatte da Bernd Sturmfels e Stéphane Gaubert.

Per concludere, mi permetto di aggiungere una nota di carattere personale sul mio percorso professionale. Dopo una formazione in matematica all'Università di Firenze, ho conseguito un dottorato di ricerca in Francia ed in seguito, dopo esperienze post-dottorali in Canada e Germania, sono diventato ricercatore e docente a Limoges. La mia prospettiva è adesso quella di proseguire l'attività di ricerca in un dipartimento che mi dia la possibilità, da una parte, di condividere le mie tematiche di ricerca e dall'altra di arricchirle, in un ambiente scientifico di rilevanza internazionale. Riterrei un particolare privilegio poterlo fare al Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano.

Limoges, 8 luglio 2021

Simone Naldi



Candidatura ad un posto di RTD-B in Geometria Università degli Studi di Milano

Codice Bando 4773

Simone Naldi

unilim.fr/pages_perso/simone.naldi/

Indice

1	Curriculum vitae	3
1.1	Dati personali	3
1.2	Attività professionale in sintesi	3
1.3	Formazione	3
1.4	Percorso professionale	4
1.5	Finanziamenti, awards, fellowships	5
1.6	Supervisione di tesi	6
1.7	Responsabilità e diffusione	6
1.8	Lista completa delle pubblicazioni	8
1.9	Lettere di referenza	9
2	Programma di ricerca (2021-2024)	11
2.1	Contesto	11
2.2	Obiettivi	13
2.3	Elementi di integrazione e comunità internazionale	14
3	Attività di ricerca	16
3.1	Overview of the research domain	16
3.2	Contributions	17
4	Attività d'insegnamento	24
4.1	Sintesi dell'esperienza di insegnamento	24
4.2	Insegnamenti effettuati	24
5	Allegati	30
5.1	Review della tesi di dottorato (B. Sturmfels)	30
5.2	Review della tesi di dottorato (S. Gaubert)	32

1 Curriculum vitae

1.1 Dati personali

Nome e cognome : Simone Naldi

Data e luogo di nascita : 28 Ottobre 1987, Firenze

Nazionalità : italiana

Indirizzo professionale : Université de Limoges, Faculté des Sciences et Techniques
123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges cedex

Telefono personale : (+33) 7 67 41 79 45

E-mail : simone.naldi@unilim.fr

Pagina web : https://www.unilim.fr/pages_perso/simone.naldi/

1.2 Attività professionale in sintesi

Pubblicazioni		Supervisione		Diffusione scientifica (selez.)	
Riviste internazionali	10	Tesi di dottorato	1	Seminari in conf. internazionali	8
Atti di conferenze di rango A*	4	Tesi magistrali	3	Seminari in conf. nazionali o gruppi	23
		Progetti studenti	2		

Responsabilità scientifiche e pedagogiche	
Organizzazione di conferenze	2 conferenze nazionali, 1 conferenza internazionale (GO 60 2021) 1 sessione in SIAM AG 2019, 3 sessioni in conferenze nazionali
Comitati di conferenze	Membro del Poster Committee di ISSAC 2019 e 2021
Responsabile di insegnamenti	1 nel 2017–2018, 4 nel 2018–2019, 4 nel 2019–2020, 5 nel 2020–2021
Responsabile Tesi di laurea	Laurea magistrale in Matematica ACSYON (dal 2018)

1.3 Formazione

In sintesi

<i>inizio</i>	<i>fine</i>	<i>istituzione</i>	<i>funzione/statuto</i>
08/2014	11/2014	University of California at Berkeley	Visiting graduate student
10/2012	09/2015	UPMC (Paris) & CNRS LAAS (Toulouse)	Dottorando
10/2009	04/2012	Università degli Studi di Firenze	Laurea Magistrale in Matematica
10/2006	10/2009	Università degli Studi di Firenze	Laurea Triennale in Matematica

In dettaglio

Laurea in Matematica : Mi sono laureato in Matematica all'Università degli Studi di Firenze nel 2012 (magistrale) e nel 2009 (triennale). Nella mia tesi magistrale (relatori [G. Ottaviani](#) e [M. Longinetti](#), Univ. Firenze) mi sono interessato alla geometria del cono dei polinomi positivi in più variabili. La tesi è sfociata in una pubblicazione in Discrete and Computational Geometry. Il relatore della mia tesi triennale è stato [V. Ancona](#) (Univ. Firenze).

Dottorato di Ricerca: Ho conseguito un dottorato di ricerca in matematica nel 2015 all'Université Pierre et Marie Curie, Parigi, e al CNRS LAAS, Tolosa, con relatori [M. Safey El Din](#) (UPMC) e [D. Henrion](#) (CNRS-LAAS). Nella tesi di dottorato (si veda più in basso) ho sviluppato metodi effettivi ed algoritmi per varietà algebriche con struttura determinantale e applicazioni in ottimizzazione polinomiale. I risultati più rilevanti sono stati pubblicati in differenti articoli di rivista (o atti di conferenza di rango [Core A*](#)).

Università di Berkeley: Ho visitato il gruppo di ricerca di [B. Sturmfels](#) dell'Università di Berkeley tra l'agosto ed il novembre 2014, partecipando al contempo al programma [Algorithms and Complexity in Algebraic Geometry](#).

Tesi di dottorato (UPMC e Université de Toulouse)

Titolo: [Exact algorithms for determinantal varieties and semidefinite programming](#)¹

Istituzione: Université Pierre et Marie Curie (Parigi, Francia) e INSA / Université de Toulouse (Tolosa, Francia).

Discussione: 24/09/2015, CNRS LAAS, Tolosa, Francia.

Commissione di tesi:

[Giorgio Ottaviani](#) (Professor, University of Florence, Italy)

[Bernd Sturmfels](#) (Professor, UC Berkeley, USA - MPI Leipzig, Germany), reviewer

[Bernard Mourrain](#) (Directeur de Recherche Inria, Inria Méditerranée Sophia Antipolis, France)

[Stéphane Gaubert](#) (Directeur de Recherche Inria, Inria Saclay, France), reviewer

[Markus Schweighofer](#) (Professor, Universität Konstanz, Germany)

[Jean-Charles Faugère](#) (Directeur de Recherche Inria, UPMC Paris, France)

[Bruno Salvy](#) (Directeur de Recherche Inria, ENS Lyon, France), presidente della commissione

[Didier Henrion](#) (Directeur de Recherche CNRS, LAAS Toulouse, France), relatore

[Mohab Safey El Din](#) (Professor, UPMC Paris, France), relatore

1.4 Percorso professionale

In sintesi

<i>inizio</i>	<i>fine</i>	<i>istituzione</i>	<i>funzione/statuto</i>
09/2017	—	Université de Limoges, France	Maître de Conférences
04/2016	08/2017	Technische Universität Dortmund	Postdoc
09/2015	12/2015	Fields Institute (Toronto)	Postdoc

In dettaglio

Maître de Conférences (Université de Limoges): Dal settembre 2017 sono ricercatore universitario (Maître de Conférences²) della [Facoltà di Scienze](#) dell'Università di Limoges. Faccio parte del gruppo di ricerca di [Algebra e Geometria Computazionale](#) (Calcul Formel) dell'Istituto XLIM. La mia attività di insegnamento si inserisce nell'offerta formativa prevista per il corso di laurea in Matematica e per altri corsi della Facoltà di Scienze (Informatica, Fisica, Chimica e Scienze della vita).

¹La tesi è disponibile al link: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01212502>

²Per una equivalenza con le posizioni accademiche italiane, si veda la tabella ufficiale del MIUR al seguente [link](#)

Postdottorato (Technische Universität Dortmund): Tra l'aprile 2016 e l'agosto 2017, sono stato postdottorando dell'Università di Dortmund. Ho prestato servizio nel gruppo di [Algebra e Geometria](#) del Dipartimento di Matematica. Il responsabile scientifico è stato [D. Plaumann](#), con cui ho avviato diverse collaborazioni.

Postdottorato (Fields Institute, Toronto): Nell'autunno del 2015, sono stato postdottorando del [Fields Institute for Research in Mathematical Sciences](#), a Toronto, durante il programma [Thematic Program on Computer Algebra](#).

1.5 Finanziamenti, awards, fellowships

Progetti finanziati

Periodo	Dettagli del progetto
2021–2025	<i>ANR JCJC “HYPERSPACE”.</i> Il progetto “Jeune Chercheuse Jeune Chercheur (JCJC)”, dal nome HYPERSPACE, è stato finanziato nel contesto dell'ultimo appello dell'ANR (l'agenzia francese dei finanziamenti ministeriali per la ricerca). La tematica riguarda i polinomi iperbolici e le loro rappresentazioni determinantal (si veda il “Programma di ricerca (2021-2024)” in Sezione 2). Il finanziamento accordato è di 83,200 Euro . L'implicazione in questo progetto è al 70% del tempo ricerca.
2018–2021	<i>Progetto PGMO 2018-0061-H.</i> Responsabile principale del progetto PGMO ³ Hyperbolic Polynomials: Algorithms and Implementations , finanziato dalla Fondation Mathématique Jacques Hadamard, per il periodo 2018-2021 (8,000 Euro). Finanziamenti per missioni di ricerca (3 articoli scritti nel contesto di questo progetto) e remunerazione di stage per studenti di lauree magistrali (2 tesi magistrali che ho supervisionato: quella di A. Polyatkin, nel 2020, e quella di K. Elmalki, nel 2021, cf. Sezione 1.6.2).
2019–2022	<i>Progetto PGMO P-2019-0023.</i> Prosecuzione del finanziamento del progetto PGMO precedente, fino al 2022 (6,000 Euro). Finanziamento della seconda tranche: 6,000 Euro .

Progetti in corso di valutazione

Periodo	Dettagli del progetto
2021–2024	<i>ANR PRC AAPG 2021.</i> Faccio parte di un consorzio che raggruppa l'Università di Limoges insieme ai laboratori LIRMM (Montpellier), LIP (Lyon), LJK (Grenoble). Tale consorzio ha presentato un progetto collaborativo dal nome CLAPAS (Computational Linear Algebra and Polynomial Arithmetic with Structure), il cui obiettivo è quello di sviluppare metodi algebrici e corrispondenti algoritmi efficaci per problemi in algebra lineare esatta ed in combinatoria enumerativa. In particolare, la mia contribuzione riguarderà il problema del calcolo di sizigie di moduli sull'anello dei polinomi in più variabili tramite moltiplicazione di matrici polinomiali. Il mio tasso d'implicazione in questo progetto è del 10% del tempo ricerca. La domanda di finanziamento è di 288,000 Euro. Il progetto è in revisione in Fase 2.

Awards e fellowships

Periodo	Dettagli
2019–2023	<i>PEDR (Prime d'Encadrement Doctorale et de Recherche).</i> Premio per l'attività di ricerca e di supervisione dottorale (18,000 Euro su quattro anni).
2017	<i>Concours CNRS 2017.</i> Ritenuto ammissibile per un posto da CR CNRS (Chargé de recherche), classificato terzo in sezione 41 (Matematica). Si veda il link .
09/2015–12/2015	<i>Fields Institute Postdoctoral Fellowship.</i> Borsa per soggiorno postdottorale al Fields Institute, Toronto ON, Canada (ca. 11,000 CAD).
08/2014–11/2014	<i>Bourse EDSYS.</i> Visita all'Università di Berkeley durante il dottorato (ca. 3,000 Euro).

³Pagina web del progetto: https://www.unilim.fr/pages_perso/simone.naldi/pgmo18.html

1.6 Supervisione di tesi

1.6.1 Tesi di dottorato

Jingchuan Xiao (2020-2023): Dal Novembre 2020 sono relatore della tesi di dottorato di Jingchuan Xiao. Il contesto della tesi è la teoria algebrica e geometrica dei polinomi iperbolici e delle loro rappresentazioni determinanti. In particolare, ci si interessa allo studio di forme canoniche per polinomi iperbolici, legato al cosiddetto test d'iperbolicità. La tesi è co-supervisionata con M. Barkatou (Univ. Limoges).

1.6.2 Tesi magistrali

Grace Younes (Marzo-Settembre 2018): Studentessa della laurea magistrale in Matematica dell'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, G. Younes ha elaborato la sua tesi magistrale a Limoges sotto la mia supervisione. L'argomento della tesi in oggetto è stato il calcolo efficace di sizigie di moduli sull'anello dei polinomi in più variabili. G. Younes è al momento dottoranda a INRIA Paris sotto la direzione di A. Quadrat.

Andrii Polyatikin (Marzo-Settembre 2020): Studente della laurea magistrale in Matematica ACSYON (Univ. Limoges), A. Polyatikin ha effettuato la tesi magistrale sotto la mia supervisione. Nella tesi sono stati studiati i polinomi iperbolici, e sono state sviluppate delle varianti dei rilassamenti di Renegar per la risoluzione di problemi di programmazione iperbolica.

Khawla Elmalki (Marzo-Settembre 2021): Studentessa della laurea magistrale in Matematica ACSYON (Univ. Limoges), K. Elmalki ha iniziato in Marzo 2021 la tesi magistrale sotto la mia supervisione. La tesi ha come obiettivo quello di utilizzare i polinomi iperbolici per lo sviluppo di rilassamenti di problemi di ottimizzazione combinatoria sui grafi, come per esempio il problema max-cut.

1.7 Responsabilità e diffusione

Organizzazione di conferenze

<i>Mese/Anno</i>	<i>Nome della conferenza</i>	<i>Luogo</i>	<i>Ruolo</i>
06/2021	GO 60 - Pure and Applied Algebraic Geometry	Levico Terme, Italia	Organizzatore
07/2021	ISSAC 2021	Saint Petersburg, Russia	Poster committee
07/2019	ISSAC 2019	Beijing, China	Poster committee
05/2019	Structured Matrix Days 2019	Limoges, Francia	Organizzatore
12/2019	PGMO DAYS 2019	Saclay, Francia	Organizzatore di sessione
07/2019	SIAM AG 2019	Bern, Svizzera	Organizzatore di sessione
05/2018	Structured Matrix Days 2018	ENS Lyon, Francia	Organizzatore
11/2018	PGMO DAYS 2018	Saclay, Francia	Organizzatore di sessione

Reviewer per riviste internazionali

Si riporta nella tabella in basso una selezione delle revisioni fatte per articoli sottomessi in riviste scientifiche o alla conferenza ISSAC.

<i>Nome della rivista/conferenza</i>	<i>Numero di revisioni</i>
Journal of Symbolic Computation	6
AMS Reviews	4
Journal of Complexity	1
Appl. Algebra Eng. Comm. Comput.	1
ISSAC (Intern. Symp. Symb. Algebr. Comput.)	6

Responsabilità di insegnamenti

Nella tabella seguente, si riportano le ore d'insegnamento (didattica frontale, o a distanza durante la crisi sanitaria) effettuate a partire dal 2016 ed il numero di insegnamenti di cui sono, o sono stato, responsabile. Per una descrizione dettagliata dell'attività d'insegnamento, si veda la Sezione 4. Si ricorda che il servizio standard di un maître de conférences è di 192 ore annue.

Anno Accademico	Università	Ore	Servizio dovuto	Responsabilità
2020/2021	Université de Limoges	358	192	5
2019/2020	Université de Limoges	323	192	4
2018/2019	Université de Limoges	200	192	4
2017/2018	Université de Limoges	128 ⁴	128 ⁵	1
2016/2017	Technische Universität Dortmund	80	80	1
2015/2016	Technische Universität Dortmund	40	40	0

Dal 2018 sono anche il responsabile delle tesi di laurea della Laurea Magistrale in Matematica (ACSYON) dell'Università di Limoges. Il compito principale consiste nell'aiutare gli studenti (8–10 ogni anno) a trovare uno stage in una università o istituto di ricerca francese o estero, per il compimento della tesi di laurea magistrale, e nell'organizzazione delle sessioni di discussione di tesi.

Diffusione scientifica

Selezione⁵ di seminari in conferenze internazionali

MEGA 2017. Effective Methods in Algebraic Geometry (*contributo*, Nice, June 12-16, 2017).
ACA 2018, “Algorithms for zero-dimensional ideals” (*sessione*), Santiago de Compostela, 19/06/2018.
SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry (*sessione*, Atlanta, 01/08/2017);
BIRS Workshop on Geometry of Real Polynomials, Convexity and Opt. (*invitato*, Banff, Alberta, 27/05/2019).
AMS Southeastern Sectional Meeting 2021 (*sessione*, online seminar, 13/03/2021).
ACA 2021, “Effective ideal theory in commutative and non commutative rings” (*sessione*), 07/2021
SIAM Appl. Algebraic Geom. 2021 (*sessione* Convex Algebraic Geometry), Texas A&M University, 08/2021

Selezione⁵ di seminari su invito in workshops o gruppi di ricerca

Séminaire de géométrie algébrique réelle (Rennes, 13/06/2012);
Computer Algebra Seminar (Fields Institute, Toronto, 16/10/2015);
Computer Science Seminars (Waterloo, Canada, 03/12/2015);
Seminario di Geometria Algebrica (Firenze, Italia, 26/01/2016);
Oberseminar Reelle Geometrie und Algebra (Konstanz, 05/02/2016);
Real Algebraic Geometry and Optimization (*contributed*, Atlanta, 13/07/2016).
Oberseminar Algebra und Geometrie (Dortmund, 03/11/2016);
Séminaire MAX de Calcul formel (LIX Palaiseau, 12/12/2016);
Séminaires de Calcul Formel (Lille, 15/12/2016);
Diskrete Mathematik, Geometrie und Optimierung (Frankfurt, 20/12/2016);
MPI Seminar on Nonlinear Algebra (Max Planck Institute, Leipzig, 21/02/2017).
Polynomials and Polytopes (TU Berlin, 10/06/2017).
Reading Group on Real Algebraic Geometry (Max Planck Institute, Leipzig, 04/07/2017).
First POEMA Meeting (Firenze, Italia, 15/01/2020).

⁴Nel 2017/2018 ho usufruito di uno sgravio di 1/3 di ore d'insegnamento in quanto primo anno di servizio.

⁵Lista completa: https://www.unilim.fr/pages_perso/simone.naldi/talks.html

1.8 Lista completa delle pubblicazioni

1.8.1 Riviste internazionali

1. *Conic programming: infeasibility certificates and projective geometry*
S. Naldi and R. Sinn
J. Pure Appl. Algebra 225(7), 2021
DOI: doi.org/10.1016/j.jpaa.2020.106605
2. *Spectrahedral representations of plane hyperbolic curves*
M. Kummer, S. Naldi and D. Plaumann
Pacific J. Math. 303-1, 243–263, 2019
DOI: doi.org/10.2140/pjm.2019.303.243
3. *Exact algorithms for semidefinite programs with degenerate feasible set*
D. Henrion, S. Naldi and M. Safey El Din
J. Symb. Comput. 104: 942–959, 2021
DOI: doi.org/10.1016/j.jsc.2020.11.001
4. *Real root finding for low rank linear matrices*
D. Henrion, S. Naldi and M. Safey El Din
Appl. Algebr. Eng. Comm. 31(2):101-133, 2020
DOI: doi.org/10.1007/s00200-019-00396-w
5. *Symbolic computation in hyperbolic programming*
S. Naldi, D. Plaumann
J. Algebra Appl. 17:10, 2018
DOI: doi.org/10.1142/S021949881850192X
6. *SPECTRA - A Maple library for solving linear matrix inequalities in exact arithmetic*
D. Henrion, S. Naldi and M. Safey El Din
Optim. Method. Softw. 34(1):62–78, 2019
DOI: doi.org/10.1080/10556788.2017.1341505
7. *Solving rank-constrained semidefinite programs in exact arithmetic*
S. Naldi
J. Symb. Comput. 85C:206–223, 2018
DOI: doi.org/10.1016/j.jsc.2017.07.009
8. *Exact algorithms for linear matrix inequalities*
D. Henrion, S. Naldi, M. Safey El Din
SIAM J. Optim. 26(4):2512–2539, 2016
DOI: doi.org/10.1137/15M1036543
9. *Real root finding for determinants of linear matrices*
D. Henrion, S. Naldi, M. Safey El Din
J. Symb. Comput. 74:205–238, 2016
DOI: doi.org/10.1016/j.jsc.2015.06.010
10. *Nonnegative polynomials and their Carathéodory number*
S. Naldi
Discrete Comput. Geom. 51(3):559–568, 2014
DOI: doi.org/10.1007/s00454-014-9588-3

1.8.2 Atti della conferenza ISSAC (A*)

Disclaimer 1. Alcuni dei miei articoli di ricerca sono stati pubblicati negli atti della conferenza ISSAC (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation). ISSAC è una conferenza con peer-reviewing, di rango [Core A*](#), e rappresenta la conferenza di riferimento della comunità di computer algebra mondiale. È considerata al pari di riviste come J. Symb. Comput. o J. Compl., con un tasso medio d'accettazione del 50% (fonte⁶).

Disclaimer 2. Se il titolo di un articolo in rivista e di un articolo di conferenza coincidono, significa che il primo è la versione estesa del secondo. In questo caso l'articolo ha ricevuto una doppia revisione tra i pari (peer-reviewing), una dalla conferenza (prima) e una dalla rivista (dopo).

1. *A divide-and-conquer algorithm for computing Gröbner bases of syzygies in finite dimension*
S. Naldi and V. Neiger
Proceedings of the 2020 ACM ISSAC, July 2020, Kalamata GRE, 2020
DOI: doi.org/10.1145/3373207.3404059. Una versione estesa sarà inviata a J. Algebra.
2. *Exact algorithms for semidefinite programs with degenerate feasible set*
D. Henrion, S. Naldi, M. Safey El Din
Proceedings of the 2018 ACM ISSAC, July 2018, New York USA, pp. 191–198, 2018
DOI: doi.org/10.1145/3208976.3209022
3. *Solving rank-constrained semidefinite programs in exact arithmetic*
S. Naldi
Proceedings of the 2016 ACM ISSAC, July 2016, Waterloo ON CAN, pp. 357–364, 2016
DOI: doi.org/10.1145/2930889.2930925
4. *Real root finding for rank defects in linear Hankel matrices*
D. Henrion, S. Naldi, M. Safey El Din
Proceedings of the 2015 ACM ISSAC, June 2015, Bath UK, pp. 221–228, 2015
DOI: doi.org/10.1145/2755996.2756667

1.8.3 Dati bibliometrici (fonte scopus⁷)

numero di pubblicazioni dal 2014	14
numero di pubblicazioni dal 2016	12
numero di citazioni	71
<i>h</i> -index	4

1.9 Lettere di referenza

I seguenti quattro colleghi possono essere contattati per una lettera di referenza sulla mia attività di ricerca:

- **Giorgio Ottaviani** (Professore Ordinario, Università degli Studi di Firenze)
Email: giorgio.ottaviani@unifi.it
Pagina web: web.math.unifi.it/users/ottavian/
- **Daniel Plaumann** (Professor, Technische Universität Dortmund)
Email: daniel.plaumann@math.tu-dortmund.de
Pagina web: www.mathematik.tu-dortmund.de/~dplauman/

⁶ISSAC's acceptance rates: <https://dl.acm.org/doi/proceedings/10.1145/3373207#acceptance-rates>

⁷www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56152224600

- **Stéphane Gaubert** (Directeur de recherche, INRIA Saclay - Île de France)
Email: stephane.gaubert@inria.fr
Pagina web: www.cmap.polytechnique.fr/~gaubert/
- **Mohab Safey El Din** (Professeur, Sorbonne Université, Paris)
Email: mohab.safey@lip6.fr
Pagina web: <https://www-polsys.lip6.fr/~safey/>

2 Programma di ricerca (2021-2024)

Questo documento descrive le principali direzioni di ricerca nell'ambito dei *polinomi iperbolici e delle loro rappresentazioni determinantal*, che porterò avanti nel prossimo triennio. Non si tratta dell'unica tematica di cui mi occupo al momento: per ulteriori linee di ricerca e le relative prospettive, si veda la Sezione 3.

2.1 Contesto

I polinomi iperbolici formano una classe di polinomi reali di interesse centrale in algebra e geometria e nelle loro applicazioni (per esempio, ottimizzazione e teoria del controllo). Il problema aperto più rilevante della teoria algebrica dei polinomi iperbolici è senz'altro la *Congettura Generalizzata di Lax (GLC)*, che lega l'iperbolicità al tema classico delle rappresentazioni determinantal in geometria algebrica. Una soluzione anche parziale della GLC avrebbe un impatto notevole in diversi ambiti della matematica.

I polinomi iperbolici sono storicamente legati a diverse aree della matematica. Compaiono per la prima volta negli anni cinquanta, nei lavori di Lax: in tale contesto, il polinomio rappresenta l'operatore differenziale in un problema di Cauchy, e la sua iperbolicità implica certe proprietà di esistenza ed unicità delle soluzioni. Nel lavoro [44] Lax enunciò la sua prima congettura per le curve, dimostrata negli anni duemila da Helton e Vinnikov [26]. Con un influente articolo di Renegar [60], questa teoria ha interessato altre comunità soprattutto in algebra ed ottimizzazione: ad ogni polinomio iperbolico si associa un insieme semialgebrico convesso (cono d'iperbolicità, si veda la Figura 2 a pagina 18) e dunque un problema di ottimizzazione polinomiale (programmazione iperbolica, HP).

Oggi i polinomi iperbolici rappresentano un'area di ricerca di vasto interesse, per esempio intervengono nella recente soluzione del problema di Kadison-Singer [46]. Nel 2019, un intero workshop⁸ organizzato al Simons Institute (Univ. of California at Berkeley) è stato dedicato a queste tematiche. L'importanza crescente dei polinomi iperbolici in matematica e nelle applicazioni è dovuta principalmente all'impatto potenziale della GLC, dimostrata nel caso delle curve, ma come già detto aperta in generale. Ho ottenuto recentemente dei nuovi risultati dal punto di vista teorico ma anche algoritmico, in una collaborazione con M. Kummer e D. Plaumann [39].

2.1.1 Cos'è un polinomio iperbolico?

Si tratta di un polinomio reale che definisce una varietà algebrica (il suo luogo degli zeri) con proprietà speciali. In breve, i polinomi iperbolici sono generalizzazioni naturali del *determinante della matrice generale simmetrica*, ed hanno proprietà simili al polinomio caratteristico di matrici reali simmetriche. Precisamente, un polinomio omogeneo $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_d$ è *iperbolico* in direzione $e \in \mathbb{R}^n$, se $f(e) \neq 0$ e se tutte le radici del *polinomio caratteristico* $t \mapsto f(te - a)$ sono reali, per ogni $a \in \mathbb{R}^n$.

Per dare un esempio, consideriamo le *forme binarie* (polinomi omogenei in due variabili). Le forme binarie iperboliche sono quelle che si fattorizzano in forme lineari reali (in senso affine, polinomi in una variabile con sole radici reali). Si tratta di una proprietà molto forte, ovviamente una forma binaria ha in genere fattori complessi. La varietà associata è discreta (insieme finito di punti in \mathbb{P}^1). Si noti che tali forme sono esprimibili come determinanti di pencil diagonali (matrici diagonali le cui entrate sono forme lineari reali). Un ulteriore esempio è quello delle *forme quadratiche*: le forme iperboliche sono quelle con inerzia *Lorentziana*, ovvero un autovalore di un segno, e gli altri di segno opposto: ad esempio, $x^2 - y^2 - z^2$ è iperbolica, mentre $x^2 + y^2 - z^2 - w^2$ non lo è.

Per un esempio di curva iperbolica in \mathbb{P}^2 , si prenda il polinomio

$$\begin{aligned} f = & 1250000x^4 - 1749500x^3y - 2250800x^2y^2 - 4312500x^2z^2 + \\ & + 69260xy^3 + 786875xyz^2 + 88176y^4 + 1141000y^2z^2 + 1687500z^4. \end{aligned} \quad (1)$$

A partire dalla scrittura di f in base monomiale, non è possibile dedurre (o *certificare*) la sua iperbolicità. La geometria della curva $f = 0$, rappresentata in Figura 1, prevede due ovali nidificati, il primo dei quali (quello più interno) è sempre convesso (nel caso specifico di questa curva, anche l'ovale esterno, ma in generale no, si veda l'immagine sulla destra in Figura 2). In effetti, si può dimostrare rigorosamente che f è iperbolico perché di f è

⁸Hyperbolic Polynomials and Hyperbolic Programming: simons.berkeley.edu/geometry2019-3

possibile calcolare una rappresentazione determinantale speciale (si veda la prossima sezione). In questo progetto di ricerca ci interessiamo al problema di rappresentare e certificare l'iperbolicità.

2.1.2 Rappresentazioni determinantali

Una classe fondamentale di polinomi iperbolici è formata dai polinomi che ammettono una *rappresentazione determinantale simmetrica definita*: ovvero, i determinanti di pencil simmetrici

$$f = \det(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n)$$

con A_1, \dots, A_n matrici simmetriche fissate. Se il pencil contiene una matrice definita positiva (od in maniera equivalente, negativa), il suo determinante è iperbolico. Come detto in precedenza, le forme binarie iperboliche sono determinantali, con A_1, A_2 che si possono scegliere diagonali.

Fortunatamente, le rappresentazioni determinantali simmetriche esistono anche al di là delle forme binarie. Infatti, un teorema di Helton e Vinnikov dimostra che tali rappresentazioni sono necessarie e sufficienti per curve piane iperboliche (tre variabili). Precisamente, ogni polinomio iperbolico in tre variabili è il determinante di un pencil in tre variabili della forma $xA + yB + zC$. Ad esempio, il polinomio f in (1) ammette una tale rappresentazione.

Il fatto che i polinomi iperbolici generalizzano il determinante simmetrico è anche evidente dalla geometria della varietà associata. Come nel caso dell'ipersuperficie determinantale simmetrica (o simmetroide), il luogo degli zeri reali di un polinomio iperbolico di grado d è unione di $\lfloor d/2 \rfloor$ componenti isotopiche a sfere, più una componente se d è dispari, isotopica ad un \mathbb{P}^1 . Tali componenti (od ovali) sono *nidificate* tra loro (in inglese, *nested*). Algebricamente, un polinomio iperbolico si comporta come il polinomio caratteristico delle matrici simmetriche: quando è ristretto a rette speciali, diventa *real-rooted*, così come per il determinante simmetrico quando viene valutato in $tI - A$, con I matrice identità ed A simmetrica.

Una domanda che sorge spontanea è se tutti i polinomi iperbolici sono determinantali. Purtroppo, o forse per fortuna, la risposta è NO già in grado basso ed in 4 variabili, per una serie di controesempi forniti da Brändén [10]. Questo *ostacolo* per il test di iperbolicità rappresenta una motivazione ulteriore per lo studio dei polinomi iperbolici e lo sviluppo di diversi *certificati*.

2.1.3 Interlacers e divisori

La costruzione di rappresentazioni determinantali per ipersuperfici (curve piane, superfici in \mathbb{P}^3 , ...) è classicamente associata all'esistenza di *curve di contatto* (si veda e.g. [15, Ch. 4]). Quando la rappresentazione è simmetrica, può essere ottenuta tramite il metodo di Dixon (1902), ma conoscere *a priori* una curva di contatto è spesso un'ipotesi troppo forte.

Per polinomi iperbolici un'alternativa è costituita da polinomi speciali chiamati *interlacers*. Se f è iperbolico in direzione e , la sua derivata direzionale $D_e f$ è anch'essa iperbolica nella stessa direzione (si dice che la derivazione è un'operazione che *preserva* l'iperbolicità). Inoltre, gli ovali della varietà $D_e f = 0$ e quelli di $f = 0$ si alternano (come le radici di un polinomio in una variabile e della sua derivata). Tutte le intersezioni reali di una curva iperbolica e di un suo interlacer sono di molteplicità pari, mentre le intersezioni complesse possono essere semplici.

Gli interlacers e le curve (od in dimensione alta, superfici) di contatto corrispondono a divisori sulla data varietà. Ad esempio, il polinomio

$$500x^3 - 800x^2y - 740xy^2 - 625xz^2 + 176y^3 + 1000yz^2$$

è un interlacer del polinomio f in (1), con 12 punti di intersezione tutti reali (Figura 1), ed il divisore corrispondente è

$$4 \cdot (4 : -5 : 0) + 2 \cdot (11 : 5 : 0) + 2 \cdot (1 : 5 : 0) + 2 \cdot (7 : 10 : -10) + 2 \cdot (7 : 10 : 10).$$

L'interesse degli interlacers rispetto alle curve di contatto è che i primi si possono calcolare facilmente: l'insieme degli interlacers è esso stesso un cono convesso (nello spazio dei polinomi di grado $\deg(f) - 1$), più precisamente è la proiezione di uno spettraedro (sezione del cono delle matrici semidefinite positive). Un interlacer può quindi essere ottenuto tramite programmazione semidefinita (calcolo di un punto su uno spettraedro). Uno dei problemi principali che ci poniamo è quello di caratterizzare i punti estremi di tali coni, che corrispondono ad interlacers con un *numero massimo di intersezioni reali*. Tali interlacers corrispondono a rappresentazioni determinantali di *taglia minimale*, si veda ad esempio [39, Teo. 2.2].

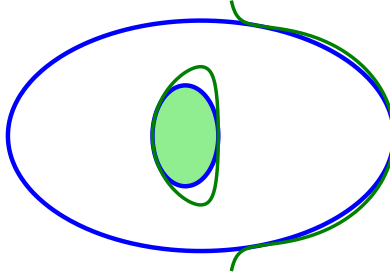


Figura 1: La quartica iperbolica, il suo interlacer cubico e le 12 intersezioni reali

2.2 Obiettivi

Di seguito si descrivono in dettaglio tre diverse direzioni di ricerca.

Si propone di sviluppare dei metodi algebrici e algoritmi dedicati ai polinomi iperbolici e corrispondenti ipersuperfici (simmetroidi e varietà iperboliche) e insiemi semialgebrici (spettraedri e coni d'iperbolicità). La prima direzione è la prosecuzione naturale del lavoro [39] che riguarda la costruzione di rappresentazioni determinantal generalizzate per curve piane iperboliche (*rappresentazioni spettraedrali*) ma che promette di estendersi almeno parzialmente alle *superfici* in \mathbb{P}^3 .

Si descrivono inoltre due linee di ricerca più recenti. La prima ha come obiettivo quello di caratterizzare l'iperbolicità tramite altre rappresentazioni, ovvero nuove strategie per il *test d'iperbolicità*. La seconda è orientata allo studio della *complessità* dei polinomi iperbolici, nel contesto della programmazione semidefinita e iperbolica.

2.2.1 Rappresentazioni spettraedrali di superfici

Nel lavoro [39] ci siamo interessati al caso di curve iperboliche (tre variabili): in questo caso, il teorema di Helton-Vinnikov implica l'esistenza di un certificato corto " $f = \det$ " che può essere ottenuto tramite l'algoritmo di Dixon [14]. Tale metodo dipende fortemente dalla conoscenza di una curva di contatto. Nel nostro lavoro, abbiamo dimostrato che si possono costruire delle forme lineari l_i (a partire dal polinomio f e da un interlacer) tali che il loro prodotto $g = l_1 l_2 \cdots l_c$ soddisfa la proprietà seguente: il polinomio fg ha una rappresentazione simmetrica definita " $fg = \det$ ", che certifica l'iperbolicità di f (per quanto riguarda g , si noti che l'iperbolicità è palese per costruzione). Le forme lineari l_i sono costruite interpolando le intersezioni complesse della curva $f = 0$ e del suo interlacer. Pensiamo che questo sia possibile anche in più di tre variabili: questo potrebbe portare ad una soluzione costruttiva della Congettura Generalizzata di Lax, od a controesempi espliciti: tale congettura, nella sua forma algebrica, stabilisce che per un polinomio iperbolico f , debba esistere un altro polinomio g tale che fg ha una rappresentazione determinantale simmetrica definita⁹.

Con l'idea di procedere per gradi, il caso successivo è quello delle superfici cubiche dello spazio proiettivo, già oneroso dal punto di vista computazionale. La strategia che stiamo seguendo si basa sull'esistenza di speciali superfici di contatto reali con un numero (finito) massimo di intersezioni reali con la superficie, che porta al problema concreto e prioritario di caratterizzare i *raggi estremi del cono degli interlacers* in dimensione alta (per le curve, il problema è risolto in [39]). Inoltre, non è tuttora chiaro (anche per le curve, se si esclude casi specifici in grado basso) se esistano interlacers con il numero massimale di punti di contatto (tale numero è tuttavia noto per le curve [39, Lem. 1.3]). L'esistenza di tali interlacers implicherebbe l'esistenza di rappresentazioni determinantal di tipo " $fg = \det$ " dove la

⁹Questo accade già per le superfici quadratiche: la forma $f = x^2 - y^2 - z^2 - w^2$ è iperbolica ma non ha una rappresentazione determinantale simmetrica definita; un suo multiplo però ammette una tale rappresentazione:

$$x^2(x^2 - y^2 - z^2 - w^2) = \det \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ y & x & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ w & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

taglia della matrice è minimale. Questa linea di ricerca è in corso (in parte in collaborazione con M. Kummer e D. Plaumann).

2.2.2 Polinomi universali per l'iperbolicità

Questa direzione si interessa al problema di testare l'iperbolicità di un dato polinomio, utilizzando delle strategie *indipendenti dalle rappresentazioni determinanti*. Come si è spiegato, un modo classico per testare l'iperbolicità è quello di calcolare una matrice lineare tale che il dato polinomio f uguagli il suo determinante. Infatti, ogni polinomio della forma $\det(\sum_i x_i A_i)$ è iperbolico (se il pencil $\sum_i x_i A_i$ è definito positivo o negativo su un punto). Per le curve, è una condizione necessaria e sufficiente, ovvero, ogni curva iperbolica è un determinante simmetrico ristretto a uno spazio lineare di matrici di dimensione tre. Detto altrimenti, il determinante simmetrico è un *polinomio universale* per le curve iperboliche.

Ci sono altri polinomi universali se guardiamo alle forme binarie o quadratiche. Per le prime, il polinomio $y_1 \cdots y_d$ è universale, dal momento che ogni forma binaria di grado d si ottiene valutando tale polinomio su uno spazio lineare $L \subset \mathbb{R}^d$ di dimensione 2. Per le forme quadratiche, il *polinomio di Lorentz* $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \cdots - y_n^2$ è universale, perché una forma quadratica iperbolica ha necessariamente una tale inerzia.

Questa parte del progetto ha come obiettivo quello di identificare condizioni ed ostruzioni perché un dato polinomio sia universale per l'iperbolicità. È un progetto in corso, in collaborazione con J. Xiao (di cui sono relatore di tesi di dottorato), M. Barkatou (Univ. Limoges) ed in parte con F. Gesmundo (MPI Leipzig).

2.2.3 Equivalenza di programmazione semidefinita e iperbolica

È nota l'assenza di upper bound ragionevoli per problemi riguardanti i polinomi iperboliche, che d'altra parte sono ritenuti cruciali per la ricerca futura in questo campo. Un esempio è il problema di stimare dall'alto la taglia della matrice lineare $A = \sum_i x_i A_i$ in una rappresentazione simmetrica, problema che è al cuore dell'analisi della complessità del test d'iperbolicità e di alcuni problemi di ottimizzazione convessa.

Nel lavoro [52] abbiamo descritto un metodo (ed un algoritmo esatto) per risolvere un problema HP che si basa sulla *molteplicità* – l'equivalente del co-rango per polinomi iperboliche generali – ma indipendente dalla rappresentabilità del polinomio come determinante. Il prossimo passo è quello di sviluppare metodi indipendenti dalla GLC (Congettura Generalizzata di Lax). Infatti, dei lower bounds esponenziali ottenuti recentemente suggeriscono che le rappresentazioni spettrali potrebbero essere difficili da trattare in pratica. Questo però non esclude a priori la possibilità che programmazione iperbolica e semidefinita siano *equivalenti in tempo polinomiale*.

La domanda se esista una riduzione naturale dalla HP alla SDP o persino alla LP (prog. lineare) in tempo polinomiale può esser vista come una versione debole della GLC. Un lavoro in corso costruisce espliciti *rilassamenti iperboliche di varietà iperboliche*, ovvero, dei problemi HP rilassati le cui soluzioni tendono asintoticamente alla soluzione originale, ma con insieme ammissibile più regolare. Queste varietà rilassate potrebbero avere un impatto sul design di algoritmi numerici di tipo discesa di gradiente o interior-point. La metodologia utilizzata in questo caso si basa su operazioni che preservano l'iperbolicità (come le derivate di Renegar o la polarità).

2.3 Elementi di integrazione e comunità internazionale

Vorrei concludere con alcune riflessioni più generali sulla mia attività di ricerca, sulla potenziale integrazione come ricercatore universitario nel Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano, e sul contesto internazionale.

Rispetto all'argomento della mia tesi di dottorato, sicuramente di ambito più computazionale, la mia ricerca si è orientata in seguito verso lo studio dei polinomi iperboliche. Si tratta di una tematica nascente ma che ha radici in problemi classici della geometria algebrica, uno dei quali è la rappresentabilità di ipersuperfici tramite determinanti [15, Ch. 4]. Le prospettive descritte in Sezione 2.2 portano a delle problematiche di interesse in geometria algebrica, come ad esempio l'esistenza di curve di contatto per curve iperboliche, con un dato numero di intersezioni reali, problema legato all'esistenza di rappresentazioni determinanti di taglia minima, come spiegato in [39]. È ragionevole ritenere che queste problematiche potranno avere delle interazioni con alcune delle direzioni di ricerca presenti o futuri dei colleghi di algebra commutativa e geometria algebrica di Milano.

Nel contesto internazionale, la mia attività di ricerca si inserisce nella comunità di *convex algebraic geometry*, si veda ad esempio il testo/manifesto [5] al link¹⁰. Si tratta di una disciplina che raggruppa ricercatori in geometria algebrica e geometria algebrica reale e con uno sguardo alle applicazioni, principalmente in ottimizzazione (semidefinita, polinomiale). La parola “convex” fa riferimento all’interesse verso lo studio di insiemi semialgebrici convessi, per esempio involucri convessi di varietà algebriche reali (un esempio: [63]) o insiemi semialgebrici, come ad esempio gli spettraedri o i coni d’iperbolicità (cf. Sezione 3.2.3, Sezione 3.2.1).

Le occasioni di incontro della comunità di geometria algebrica convessa sono state molteplici dal 2012 in poi (data nella quale ho iniziato il dottorato di ricerca); si possono ricordare per esempio i tre incontri al Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach nel 2014¹¹, 2017¹² e 2020¹³, l’incontro a Banff nel 2019¹⁴, il semestre tematico a ICERM (Providence) nel 2018¹⁵ e le conferenze SIAM Applied Algebraic Geometry, per esempio quella di quest’anno¹⁶. Una delle riviste di riferimento della comunità è la recente *SIAM J. on Applied Algebra and Geometry*¹⁷.

¹⁰Convex Algebraic Geometry: www.mit.edu/~parrilo/sdocag/

¹¹MFO 1415: publications.mfo.de/handle/mfo/3407

¹²MFO 1710: publications.mfo.de/handle/mfo/3578

¹³MFO 2010: publications.mfo.de/handle/mfo/3733

¹⁴BIRS Workshop on Geometry of Real Polynomials, Convexity and Opt.: www.birs.ca/events/2019/5-day-workshops/19w5180

¹⁵ICERM Semester on Nonlinear Algebra: icerm.brown.edu/programs/sp-f18/

¹⁶SIAM AG21: www.siam.org/conferences/cm/conference/ag21

¹⁷SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry: www.siam.org/.../siam-journal-on-applied-algebra-and-geometry-siaga

3 Attività di ricerca

Disclaimer. Questa sezione contiene una descrizione dettagliata della mia attività di ricerca presente o passata. È redatta in lingua inglese per essere compatibile anche con una eventuale review esterna.

The document is organised as follows:

- Section 3.1: general overview of the scientific domains related to my research activity
- Section 3.2: full details of the main contributions and of the perspectives

3.1 Overview of the research domain

The domain of my research activity lies at the crossroad of *real algebraic geometry* and *computational algebra*.

3.1.1 Real algebraic geometry

(Related contributions : Section 3.2.1, 3.2.3 and 3.2.4).

This research field is the study of the geometry of *real algebraic varieties* and more generally, of sets defined by polynomial inequalities with coefficients in a real closed field, called *semialgebraic sets*, in other words, real vanishing loci of polynomial equations and solution sets to polynomial inequalities [4]. It is intimately related to the characterization of *positive functions over (semi)algebraic sets*. One of the historical results in this area, which can be seen as the foundation of real algebraic geometry, is the solution of Hilbert's 17th problem, asking whether every positive polynomial is a sum of squares of rational functions, given by Artin and Schreyer in the twenties [8].

I have been interested in studying *determinantal varieties* and corresponding semialgebraic sets defined by positivity conditions on minors of linear matrices. These varieties are defined by structured polynomial systems (minors of fixed size of matrices whose entries are polynomials) and are highly singular both over the complex and the real numbers. Exploiting the structure of the defining ideal of such varieties and the existing relations between the generators is crucial in order to develop efficient effective methods [32].

A second axis of my research in (real) algebraic geometry concerns special algebraic varieties called *hyperbolic* (from *hyperbolic polynomials*). These are natural generalization of the *symmetric determinant*. From a geometrical point of view, the real hypersurface defined as the zero locus of a hyperbolic polynomial of degree d is the union of $\lfloor d/2 \rfloor$ components isotopic to spheres plus an extra component if d is odd, isotopic to a $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, and such components (or *ovals*) are nested (see Figure 2). Algebraically, hyperbolic polynomials share some properties with (parametrized families of) characteristic polynomials of symmetric matrices: when the polynomial is restricted to special lines, it becomes real-rooted, exactly as the symmetric determinant when evaluated over $tI - A$, with A symmetric. I have studied in particular *determinantal representations of hyperbolic polynomials* [39]. See Section 3.2.1, 3.2.3 and 3.2.4 for more details about my contributions in real algebraic geometry.

3.1.2 Computational algebra

(Related contributions : Section 3.2.2 and 3.2.3).

Developing effective and constructive methods has become a standard of current research in algebraic geometry. Softwares like CoCoA [1] or Macaulay2 [23] represent today a crucial support when dealing with problems concerning algebraic varieties and polynomial systems, and even entire journals have been dedicated to the development of algorithms and implementations for algebraic geometry¹⁸. Part of my activity is devoted to the development of algorithms and implementations in computer algebra systems.

A central theme of my current research in this domain concerns a classical problem in computational commutative algebra, the computation of the *syzygy module* of elements in modules over polynomial rings. This is a basic subroutine

¹⁸Journal of Software for Algebra and Geometry <https://msp.org/jsag/2021/11-1/index.xhtml>

in the computation of free resolutions of modules, which allows us to derive important information about the module, such as its Hilbert series. The main goal is to represent all the algebraic relations that exist between vectors of multivariate polynomials. Indeed, one of the major differences between modules and vector spaces is that generators of modules typically satisfy non-trivial relations, that is, are linearly dependent over the base ring. More precisely, I am interested in developing algorithms for computing *Gröbner bases* of syzygy modules, that are special sets of generators that make the module and its resolution *tractable* from a computational viewpoint.

Since my PhD thesis I have also contributed to the development of effective methods and corresponding algorithms for solving systems of polynomial equations and deciding the feasibility of polynomial inequalities in structured cases. Such algorithms are used to understand the geometry of special classes of varieties called *symmetroids* and convex semialgebraic sets called *spectrahedra* (cf. also Section 3.1.3). For contributions in computational algebra see Section 3.2.2 and 3.2.3.

3.1.3 From algebraic geometry to semialgebraic optimization

(Related contributions : Section 3.2.3 and 3.2.1)

Semialgebraic (or polynomial) optimization is the natural optimization problem associated to algebraic geometry: it aims at minimizing a real multivariate polynomial or a rational function over algebraic varieties or semialgebraic sets, and is equivalent to the characterization of *positive polynomials over semialgebraic sets*. Despite the word “optimization” is used, semialgebraic optimization is a *highly algebraic* problem, indeed both the objective value and minimizers are algebraic functions of the input, that is, they can be in principle expressed as a polynomial function of input parameters, see for instance [21, 55]. Examples of polynomial optimization problems are the distance minimization to an algebraic variety [16] and low-rank approximation of tensors [19].

Since the mid nineties, the connection between real algebraic geometry and semialgebraic optimization has been studied and developed under several points of view. As described above, the former is the study of real closed fields and real algebraic or semialgebraic sets. Results from real algebraic geometry obtained in the '90s such as Putinar's Positivstellensatz [58] (or that of Schmüdgen) allow one to represent a polynomial f which is positive over a semialgebraic set $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) \geq 0, \dots, g_s(x) \geq 0\}$ as a combination $f = \sigma_1 g_1 + \dots + \sigma_s g_s$ where the “coefficients” σ_i are sums of squares, making the link with positivity hence with semialgebraic optimization.

Despite its general NP-hardness, semialgebraic optimization can be reduced to a hierarchy of convex *semidefinite programs*, that is linear programs over the cone of positive semidefinite matrices. This is due to a general method of Lasserre and Parrilo, based on the duality theory between positive polynomials and moments of measures [43]. The solutions in the semidefinite programming SDP hierarchy correspond to lower bounds for the optimal value of the original problem: these lower bounds can be computed in finite-precision arithmetic in polynomial time by the interior-point method [36, 54], but a systematic exact approach to SDP was essentially missing. I have contributed to the study of theoretical complexity of SDP during my PhD thesis.

3.2 Contributions

3.2.1 Hyperbolic varieties and their determinantal representations

Hyperbolic polynomials are real polynomials defining algebraic hypersurfaces with special properties: they can be considered as a generalization of the *determinant of the general symmetric matrix* and share properties of characteristic polynomials of real symmetric matrices. For instance, among binary forms, the hyperbolic ones are those that factor in real linear forms (in the affine setting, real rooted univariate polynomials).

A fundamental class of multivariate hyperbolic polynomials consists of those possessing a *definite symmetric determinantal representation* $f = \det(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)$, for given real symmetric matrices A_1, \dots, A_n , with $e_1 A_1 + \dots + e_n A_n > 0$ for some direction e . Any polynomial of this form is hyperbolic, but not every hyperbolic polynomial has such a representation [10], except in low dimension by a result of Helton and Vinnikov [26].

Hyperbolic polynomials are also highly related to convex optimization. Indeed, one can naturally associate to every hyperbolic polynomial f a convex basic semialgebraic set, called the *hyperbolicity cone*. Hyperbolic programming (HP) is the problem of minimizing linear functions over hyperbolicity cones. The motivation for studying this class of

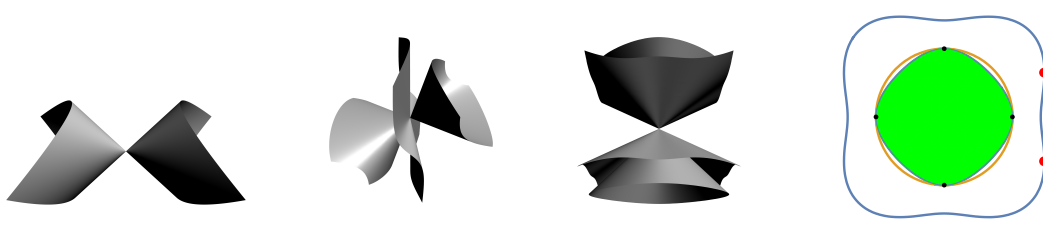


Figure 2: From the left, hyperbolic surfaces of degree two, three and four. On the right, the viewpoint of a hyperbolicity cone from a spherical section, and a real contact curve

semialgebraic optimization problems comes from the theory of hyperbolic PDEs and the Cauchy problem [22, 24], but it is now a promising research area in the domain of convex algebraic geometry and computer algebra [52, 39, 40, 57]. The current main goal of the whole theory is to prove (or disprove) the Generalized Lax Conjecture, claiming that every hyperbolicity cone is a *spectrahedron*, that is, a section of the cone of positive semidefinite matrices, namely the feasible set of a semidefinite programming (SDP) problem.

If f has a definite determinantal representation then its cone is a spectrahedron, and HP reduces to SDP. Even though a hyperbolic polynomial f does not admit determinantal representations, it is still possible that his hyperbolicity cone is spectrahedral. This happens exactly when a multiple of f , say fg for some polynomial g , admits a definite symmetric determinantal representation $fg = \det(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)$. Hence a crucial problem (actually equivalent to the Generalized Lax Conjecture) is to determine whether some multiple of a hyperbolic polynomial f has symmetric determinantal representations that can certify the hyperbolicity of f .

Contributions. My contribution to the field of hyperbolic polynomials is twofold.

Spectrahedral representations of curves [39]. Together with M. Kummer and D. Plaumann, I have worked on methods for computing determinantal representations of hyperbolic polynomials. Our first results have been published in the *Pacific Journal of Mathematics*, see [39]. The result is based on the theory of divisors and more precisely on the existence of special real contact curves to hyperbolic curves. We give an algorithm to compute a generalized determinantal representation of a polynomial: given f , and a real contact curve h , we determine a polynomial $g = \ell_1 \ell_2 \dots \ell_s$ (the product of all lines joining the complex intersections of f and h) and symmetric matrices A_1, \dots, A_n , such that $fg = \det(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)$. Such equation represents an *algebraic certificate of hyperbolicity* of f : indeed, it certifies that f is hyperbolic and that its hyperbolicity cone is the spectrahedron defined by $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \geq 0$ (spectrahedral representation). Our results improve on the Helton-Vinnikov theorem, since we rely the size of the representation to the number of real intersections of f and h , and we show the existence of rational spectrahedral representations. See below for perspectives concerning this research topic.

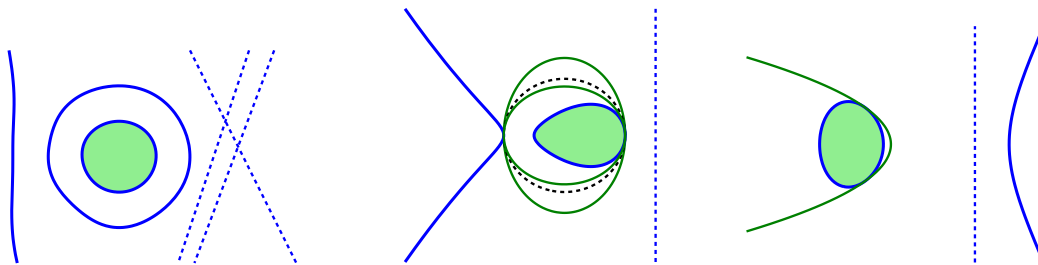


Figure 3: The extraneous factor $g = \ell_1 \ell_2 \dots \ell_s$ in the determinantal representation $fg = \det A$ of a hyperbolic plane curve $f = 0$ is a union of lines: it is represented by the dashed blue curve, whereas the blue curve is the vanishing locus of f . The determinantal representation of fg gives a spectrahedral representation of the green region (cf. [39]).

Symbolic solutions of hyperbolic programs [52]. In [52] we have proposed an approach to hyperbolic programming based on real algebraic geometry and computer algebra. In particular, our method does not rely on Renegar's theory

of derivative relaxations, and does not assume spectrahedrality for the hyperbolicity cone or for any of its derivative. Our method is hence dedicated to hyperbolic programming in its whole generality and independent on determinantal representations. Given a hyperbolic polynomial f , the key strategy consists of building a finite sequence of real algebraic sets, the *multiplicity loci*, containing boundary points of the hyperbolicity cone, and depending on an integer parameter called the *multiplicity*. Multiplicities generalize the notion of ranks to hyperbolic polynomials without determinantal representations. The original solution to the HP problem lies in one of these sets and we prove that it can be computed by optimizing the same linear function over the corresponding multiplicity locus. As an outcome, we are also able to solve the non-convex problem asking to maximize the multiplicity on the given cone. Quantifier elimination provides a doubly-exponential algorithm to solve HP, and our main result is the first singly-exponential bound (polynomial in the degree of f , and singly exponential in the number of variables) for the complexity of hyperbolic programming. Our work is published in the *Journal of Algebra and its Applications* [52] and has been presented at the conference *MEGA - Effective Methods in Algebraic Geometry*, Nice, May 2017.

Impact. The work [39] has described a potential strategy to attack the Generalized Lax Conjecture via the theory of interlacers, and in a current research project we aim at generalizing this approach to hyperbolic surfaces (see below). Moreover, the impact of both our contributions [39, 52] can be read especially on the community of algebraic geometers working on hyperbolic polynomials (to cite a few, R. Sinn, B. Sturmfels, C. Vinzant, J. Saunderson...), for which algebraic methods for determinantal representations and certified algorithms for HP are crucial to understand geometrical properties of hyperbolicity cones at least in low dimension.

Work in progress.

Spectrahedral representations of surfaces and Generalized Lax Conjecture. This is an ongoing research project, in partial collaboration with [D. Plaumann](#) (Univ. Dortmund) and [M. Kummer](#) (Univ. Dresden). In [39] we have addressed the case of plane curves ($n = 3$ homogeneous variables): in this case a short certificate “ $f = \det$ ” always exists by [26], and it can be computed via the Dixon process [14], but in our work we show that allowing for a multiplier g (constructed from f and from an *interlacer*) simplifies the algorithm and the computed representation. Indeed, in our representation g is a product of linear forms interpolating the complex intersections of the curve $f = 0$ and an interlacer. We conjecture that this interpolation is always possible in more than three variables: this could lead to a constructive solution of the generalized Lax conjecture for the positive, or for the negative with explicit counterexamples.

In order to proceed step-by-step, the next interesting case to be addressed is that of *cubic hyperbolic surfaces* in \mathbb{P}^3 , which is already computationally demanding. The strategy we are following is based on the existence of special real contact curves with maximal real intersections with the surface, which leads to the concrete problem (to be prioritarily addressed) of characterizing the *extreme rays of the cone of interlacers* in high dimension (for curves, the problem is solved in [39]).

Universal polynomials for hyperbolicity. This is an ongoing project with J. Xiao and M. Barkatou, and in part with F. Gesmundo (MPI Leipzig). The project focuses on the problem of determining whether a given polynomial is hyperbolic, in other words, the *hyperbolicity test*. A classical way of testing hyperbolicity is to compute a symmetric determinantal representation, since any such polynomial is hyperbolic. For curves, this is actually a necessary and sufficient condition, since by a theorem of Helton and Vinnikov, any such curve is a symmetric determinant restricted to a three-dimensional space of matrices: in other words, the symmetric determinant is a *universal polynomial* for hyperbolicity. There are other universal polynomials if we restrict our attention to binary forms (the polynomial $y_1 y_2 \cdots y_d$) or to quadratic forms (the Lorentz polynomial $y_1^2 - \sum_{i>1} y_i^2$). The project aims at determining conditions and obstructions on polynomials for being universal for hyperbolicity.

Complexity-equivalence of hyperbolic and semidefinite programming. This perspective is related to applications in the complexity theory of convex optimization. The previous joint work with D. Plaumann [52] describes a symbolic algorithm for solving HP problems which does not rely on determinantal representations. The next step is to develop methods that are *independent on the Gen. Lax Conjecture*. Indeed, the (conditional) exponential lower bounds given recently in [59, 56] suggest that spectrahedral representations of hyperbolicity cones might be intractable (of exponential size in the degree) and the result by Scheiderer in [64] that even lifting could be insufficient (whereas for two-dimensional sets it is always possible [63]). In this context, the question whether there exists a *natural reduction from HP to SDP or even to LP in polynomial time* can be seen as a *weak version* of the Gen. Lax Conjecture and is

central in our project. A current work (in preparation, see this [recent talk at IHP](#)) constructs *explicit hyperbolic relaxations of hyperbolic programs*, that is, additional HP whose solutions coincide with the original program but whose feasible set is more regular. This would lead to *improvements on the numerical algorithms such as gradient descent or interior-point methods* for HP. Our methodology is based on operations preserving hyperbolicity, such as Renegar derivatives and, more generally, polarity.

3.2.2 Computation of syzygy modules over polynomial rings

One of the main differences between linear algebra and commutative algebra, that is, between vector spaces and modules, is that generators of modules, even if minimal, usually satisfy non-trivial (polynomial) relations, also called algebraic relations, or *syzygies*. In other words, the generators do not contain all the information needed to describe the module and to characterize it from an effective point of view. The question of computing the module of syzygies of modules over polynomial rings is foundational in computational commutative algebra [38]. It is, for instance, the basic step of the computation of a *free resolution* [18].

An important routine when dealing with modules over polynomial rings is to compute a *tractable set of generators* for the module of syzygies of the given module, that is, a *Gröbner basis*. By tractable we mean that the elements of the basis can be used to decide membership or compute normal forms with respect to the module. I have focused on the computation of syzygies of elements defined modulo a fixed module $N \subset R^m$, where R is the ring of n -variate polynomials with coefficients over a field K , and the quotient module R^m/N has finite dimension as a K -vector space.

Contribution.

Computation of Gröbner bases of syzygy modules [51]. In the paper [51], which has appeared in the *Proceedings of ISSAC 2020*, whereas a *full journal version is in preparation for submission to SIAM J. Applied Algebra and Geometry*, we consider the general setting described above. In particular we deal with modules N defined in a dual way as the intersection of kernels of some linear functionals, as in the celebrated work by Marinari, Möller and Mora [47]. A base case is that of *interpolation*, where $m = 1$, N is the ideal of a finite set of points, and the functionals correspond to evaluations in the points. Another specific setting is the so-called *Padé approximation*, when N is a monomial ideal or module, generated by powers of the variables.

In [51] we have designed an algorithm to compute a Gröbner basis of the syzygy module $\{(p_1, \dots, p_m) \in R^k : p_1 f_1 + \dots + p_m f_m \in N\}$ of F modulo N , where $F = (f_1, \dots, f_k)$ is a finite list of elements in R^m/N . We have obtained explicit complexity bounds for the case of multivariate Padé approximation, see [51]. Such problems can be a priori modeled using structured linear algebra (= linear systems whose coefficient matrix has one or more levels of structure such as Hankel or Toeplitz). Our approach instead aims at incorporating *polynomial matrix multiplication*, hence expressing the overall complexity with respect to the exponent of linear algebra. In particular, we propose a divide and conquer algorithm based on the iterative algorithm in [47], observing that each step of the iteration can be interpreted as *matrix multiplication* by a (polynomial) matrix which has a specific shape, which we call an elementary Gröbner basis. The new algorithm reorganizes these matrix products through a divide and conquer strategy, and thus groups several products by elementary Gröbner bases into a single multivariate polynomial matrix multiplication. We have further specialized our approach to multivariate matrix Padé approximation and derived complexity bounds for this case.

Work in progress.

Syzygies and free resolutions via matrix multiplication. My work on the development of new algorithms for the computation of syzygies has a natural evolution to the study of free resolutions. It is indeed natural to apply fast algorithms for the computation of syzygy modules to the computation of a complete free resolution of an ideal or a module over the polynomial rings. We are currently improving on the results in [51] in order to generalize the complexity estimates beyond the Padé approximation problems and to the computation of the i -th syzygy module. The goal is then to combine our divide-and-conquer approach based on polynomial matrix multiplication with existing algorithms for free resolutions [18]. This research project is joint with [V. Neiger](#).

3.2.3 Effective methods for determinantal varieties and spectrahedra

Since my PhD thesis, I have been interested in studying real varieties defined by structured polynomial systems, and in solving two related computational problems: computing one point per connected component of a real variety and deciding whether a semialgebraic set is empty. These are classical problems in computational algebraic geometry, for which general methods lead to exponential complexities in the input size [3]. Leveraging structures in polynomial systems solving is a well-known challenge, especially concerned with the question whether or not the complexity in the structured case can be improved by exhibiting dedicated algorithms.

My work has focused on *determinantal varieties*, that is, loci of rank defects of matrices whose entries are linear forms, aka linear matrices: $A = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$, where matrices A_i are fixed (not necessarily symmetric). The ideal of these varieties is generated by all minors of a fixed size $r + 1$ of A , however, such representation does not make the variety tractable from an effective viewpoint. Moreover these are highly singular varieties which makes the problem of sampling its connected components harder.

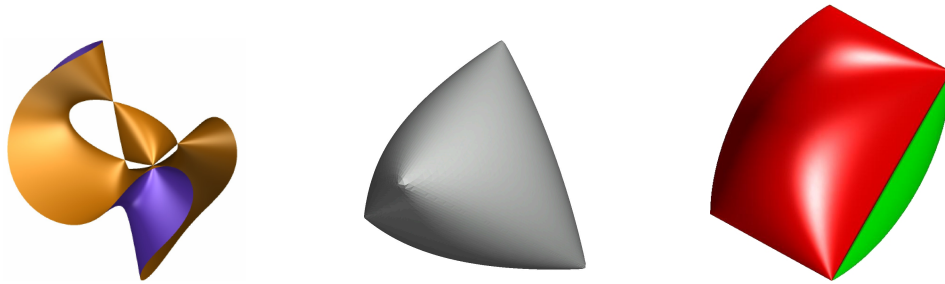


Figura 4: Examples of a symmetroid, the *Cayley cubic* (left), its spectrahedron, the *3-elliptope* (center), and another spectrahedron, the *pillow* (right)

Linear matrices also arise in the context of convex optimization. Semidefinite programming (or SDP) is the problem asking to minimize a linear function over an affine slice of the cone of symmetric positive semidefinite matrices. It is specified by the matrix pencil defining the slice, and by the coefficients of the linear function. Its feasibility problem (asking to check the existence of a feasible point) is called a linear matrix inequality (LMI). The feasible set is convex and basic semialgebraic, and is called a spectrahedron, or LMI-set; it is defined as the set of real vectors where a symmetric linear matrix $A = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$ is positive semidefinite. The complexity status of the SDP feasibility problem is open and with my PhD I have contributed to its understanding.

Contribution. The contributions are organized into three areas:

Infeasibility certificates via projective geometry [53]. In a joint work with R. Sinn, published in the *Journal of Pure and Applied Algebra*, we studied feasibility problems for (semialgebraic) cones from an algebraic point of view. Given a convex cone C and an affine space L , the associated feasibility problem asks whether L intersects C (feasible) or not (infeasible). More precisely, the feasibility is called *strong* if L meets the interior of C , otherwise *weak*; the same distinction exists for the infeasibility case for general cones. For polyhedral cones, the infeasibility is always strong, but already for spectrahedral or hyperbolicity cones, the infeasibility can be weak, meaning that the affine space can meet the cone at infinity, in which case deciding infeasibility is harder. In this work we provide a geometrical setting to handle weak feasibility, that has two important implications in the context of spectrahedra/SDP: an elementary proof of the result that *SDP feasibility is in $NP_{\mathbb{R}} \cap coNP_{\mathbb{R}}$* in the Blum-Shub-Smale model over \mathbb{R} , first established by Ramana, and the existence of SDPs for which *rational certificates* of infeasibility do not exist. We show that examples of such spectrahedra can be constructed from nonnegative polynomials that do not admit sum-of-squares representations over \mathbb{Q} , but are sums of squares over \mathbb{R} , see [62].

Exact algorithms for determinantal varieties [28, 30, 32]. Determinantal varieties represent a classical topic in algebraic geometry [17]. The key point of the contribution of part of my PhD thesis, has been to apply methods from algebraic geometry for the desingularization of such varieties. Indeed, in the case of determinantal varieties, there is a well known desingularization based on the vector bundle induced by the incidence relation $A \cdot Y = 0$. In other words, the locus of matrices of rank at most r can be seen as the projection of a variety defined by some quadratic equations in

a lifted space. Up to genericity assumptions (based on weak transversality [13]) on the matrix $A = \sum_i x_i A_i$, the lifted variety is smooth. It follows that sampling the determinantal variety can be done by sampling its smooth lifting. The output, containing one point per connected component of the input variety, is encoded in exact arithmetic by a *rational univariate representation* (the entries of each point are rational functions of the roots of a univariate polynomial with rational coefficients).

The final results published in [32] improve significantly on the known complexity bounds, yielding a *new class* of polynomial systems (those defined by minors of a given size of a linear matrix) that can be solved in exact arithmetic *in polynomial time*. The journal papers related to this topic have been published in the *Journal of Symbolic Computation* and *Applicable Algebra in Engineering Communication and Computing*, leading references for the applied algebra community.

Application to linear matrix inequalities [50, 29, 31, 33]. The results described above for determinantal varieties have been applied in the context of semidefinite programming. Indeed, the feasible set of an SDP, also called a *spectrahedron*, is defined as the locus where a linear matrix is positive semidefinite. Its algebraic boundary (Zariski closure of the Euclidean boundary) is shaped by the hypersurface $\det A = 0$.

In joint work with D. Henrion and M. Safey El Din, we have designed algebraic methods and algorithms for the solution of linear matrix inequalities, that is, for the decision problem whether a semidefinite program is feasible. This amounts to *deciding the emptiness of spectrahedra*. Its complexity is quadratic on natural degree bounds associated to the problem (the so-called *algebraic degree* of semidefinite programming [55]). When applied to the important subclasses of the problem, obtained by fixing the size of the matrix $A(x)$ or the dimension of the affine slice, our algorithms have a polynomial-time complexity: the previous state-of-the-art exact algorithms had exponential complexities with respect to the input size or relied on abstract quantifier elimination procedures with no control on the constant in the complexity. These general results have also been improved for degenerate cases [33] and for SDP problems with rank constraints [50]. I have implemented our algorithms in a Maple library called SPECTRA [31]. The main results of this contribution have been published in the *Journal of Symbolic Computation* but have also interested the optimization community (*SIAM Journal of Optimization* and *Optimization Methods and Software*).

Impact. The algorithms we have designed have attracted the attention of different communities, especially for the exact feature of the output representation, very often crucial. The software SPECTRA is currently cited in different research papers and tested in many contexts. For example, on problems in control theory [20], with applications in medical imagery [9], in the classification of Gram spectrahedra [11], or compared to methods for variants of the classical LMI [2] or to LMI solvers used in static analysis [61]. It is of interest in contexts such as the computation of cubature formulas [12]. Finally, the approach used in my PhD thesis [49] to deal with optimization over determinantal varieties has recently been applied to sparse matrix approximation problems [37].

Further, we expect a good impact of this software in the theory of positive polynomials and their sum-of-squares certificates. Recently, advances in the case of positivity on a real algebraic set have been achieved [7], together with bounds for the minimal length of the certificates [6]: such minimality is certified by SPECTRA in exact arithmetic. This exact approach is important to understand the complexity of determinantal representations [57]: we believe that computing low-rank solutions to specific highly-structured SDP will be crucial. This transversal impact of my work is also reflected by the related publications in scientific journals, namely [27] in the *J. of Symbolic Computation*, or [29] in the *SIAM J. on Optimization*, or [28] in the *Proceedings of ISSAC 2015*.

3.2.4 Geometry of nonnegative polynomials and sums of squares

Characterizing positivity of multivariate polynomials is a foundational question in real algebraic geometry. The solution given by Artin and Schreyer (in the twenties) of the 17th Hilbert's problem, that asks whether a positive polynomial is a sum of squares of rational functions, only represents the starting point of a more general theory [8]. A celebrated theorem of Hilbert [34] states that in order to characterize positivity, it is sufficient to look at sum-of-squares of polynomials in some special cases (quadratic forms, binary forms, plane quartics). Geometrically speaking, the question is whether the cone $\mathcal{P}_{n,2d}$ of n -variate positive polynomials of degree $2d$ equals its subcone $\Sigma_{n,2d}$ of sums-of-squares (SOS).

Concerning the cone $\Sigma_{n,2d}$, there are two interesting invariants, the first of which has been studied extensively: the Pythagoras number, which is the minimum r such that every $f \in \Sigma_{n,2d}$ is a sum of r squares, and the Carathéodory

number, which asks in addition that the squares are “extreme points” of $\Sigma_{n,2d}$. Indeed, for the sake of parcimony, one is often interested in using as few squares as possible, and from a convex-geometrical point of view, one wants to decompose any element as sum of extreme elements.

In convex geometry, computing the Carathéodory number of convex sets is motivated by the fact that often there are only finitely many extremal decompositions, as in the case of polyhedra, and that such number encodes important geometrical information of the set. For instance Güler and Tunçel showed that the Carathéodory number of a homogeneous cone is a lower bound for the optimal barrier parameter of self-concordant barrier functions [25]. It also has applications in the study of motion orientations of proteins [45].

Contribution. I have contributed to this topic focusing on the geometry of $\mathcal{P}_{n,2d}$ and $\Sigma_{n,2d}$, working on a special case suggested to me by G. Ottaviani and M. Longinetti (University of Florence, Italy) during my master’s degree thesis.

The Carathéodory number of $\Sigma_{n,2d}$ [48]. When $\mathcal{P}_{n,2d} = \Sigma_{n,2d}$, the positivity of a polynomial can always be certified using sums of squares. Hilbert’s theorem ensures that this is true for quadratic forms ($\mathcal{P}_{n,2} = \Sigma_{n,2}$), binary forms ($\mathcal{P}_{2,2d} = \Sigma_{2,2d}$) and ternary quartics ($\mathcal{P}_{3,4} = \Sigma_{3,4}$), whereas in all other cases $\Sigma_{n,2d}$ is strictly contained in $\mathcal{P}_{n,2d}$. The Carathéodory number of $\mathcal{P}_{n,2}$ equals n , essentially by linear algebra arguments. I have shown in [48] that for binary forms $\mathcal{P}_{2,2d}$ (equivalently, for univariate polynomials), this number equals 2, for all d . Moreover, the work [48] characterizes the set of extremal nonnegative binary forms of degree $2d$, as the set of squares of polynomials (of degree d) with only real roots. This result implies that a minimal representation of a nonnegative binary forms g is given by the sum of two squares $g = g_1^2 + g_2^2$ of polynomials with only real roots. This work has been published in *Discrete and Computational Geometry* [48].

Impact. Quite recently, my contribution has been compared to new general bounds on the Carathéodory number of convex bodies [35]. Further progress on extremal decompositions in positive cones has been proposed in [42] and in A. Kunert’s PhD thesis [41], where the author gives an upper bound for the Carathéodory number of nonnegative ternary quartics, which is 4. Characterizing extremal decompositions for other cones of sums of squares and determining their Carathéodory number remains an open problem.

4 Attività d'insegnamento

4.1 Sintesi dell'esperienza di insegnamento

Insegnamento a Limoges. La maggior parte della mia esperienza di insegnamento ha avuto luogo all'Università di Limoges¹⁹. Dal settembre 2017 svolgo la totalità del mio servizio d'insegnamento nel contesto dei corsi offerti dal Dipartimento di Matematica²⁰ della Facoltà di Scienze²¹ della nostra università. In particolare, intervengo (anche come responsabile) in alcuni corsi d'insegnamento della Laurea Triennale in Matematica, di altre Lauree Triennali della Facoltà di Scienze (Informatica, Fisica, Chimica e Scienze della Vita) e nelle due Lauree Magistrali CRYPTIS²² (matematica per la crittologia) ed ACSYON²³ (matematica applicata). Precedentemente, sono stato assistente (esercitazioni) in corsi di algebra o algebra lineare all'Università di Dortmund (Tabella 1, pagina 26, in fondo).

Didattica a distanza. A partire dalla mia entrata in ruolo nel 2017, due corsi annuali sono stati dati sotto forma di insegnamenti online, nel contesto della Laurea Magistrale ACSYON, il cui secondo anno era (fino a quest'anno) totalmente online. La maggior parte del pubblico di questi insegnamenti è costituito da studenti di università straniere, come ad esempio l'Università di Pisa con cui da qualche anno abbiamo stipulato una convenzione (si veda l'accordo quadro al link²⁴) ed alcune università in Vietnam, Marocco ed Ucraina. La crisi sanitaria ha ovviamente accentuato la componente online degli insegnamenti, che nel secondo semestre dell'anno accademico 2019/2020 e nel 2020/2021 ha riguardato la quasi totalità del mio servizio.

4.2 Insegnamenti effettuati

Di seguito si descrivono brevemente i contenuti degli insegnamenti effettuati all'Università di Limoges a partire dalla data di presa di servizio (1 settembre 2017). Gli insegnamenti sono ordinati rispetto ai settori scientifico-disciplinari del sistema italiano. La Tabella 1 a pagina 26 contiene i dettagli quantitativi (inclusi gli insegnamenti all'Università di Dortmund nel periodo 2016–2017). Una tabella con il servizio totale svolto a partire dal 2016 si trova a pagina 7.

Algebra e Geometria (equivalente SSD MAT02 e MAT03).

Algèbre linéaire 2 (Univ. Limoges, 2° anno, Laurea in Matematica, Informatica, Fisica, Chimica):

Principali argomenti trattati: richiami di algebra lineare (spazi vettoriali, applicazioni lineari, nucleo, immagine, ..); cambi di base, teorema spettrale e diagonalizzazione, esponenziale di matrice; applicazioni alla risoluzione di sistemi di equazioni differenziali e ricorrenze lineari.

Systèmes polynomiaux (Univ. Limoges, 1° anno, Laurea Magistrale in Matematica CRYPTIS):

Principali argomenti trattati: introduzione alla geometria algebrica (ideali polinomiali, corrispondenza ideali-varietà, teorema della base di Hilbert, Nullstellensatz, dimensione e grado ...); ordini monomiali, basi di Gröbner, eliminazione; teoria dell'eliminazione di Kronecker; caso in una variabile, numero di radici reali (sequenze di Sturm).

Calcul formel (Univ. Limoges, 1° anno, Laurea Magistrale in Matematica CRYPTIS):

Principali argomenti trattati: introduzione alla complessità algebrica, moltiplicazioni di polinomi (naïf, Karatsuba, Trasformata di Fourier veloce); moltiplicazione di matrici (naïf, Strassen, accenni a generalizzazioni), esponente dell'algebra lineare e complessità dell'algebra lineare; calcolo del massimo comun divisore di polinomi, metodi modulari; calcolo del risultante; fattorizzazione di polinomi in più variabili; esempi di applicazioni in teoria dei codici correttori e crittografia.

¹⁹Université de Limoges: unilim.fr

²⁰Département de Mathématiques: sciences.unilim.fr/mathematiques

²¹Faculté de Sciences et Techniques: sciences.unilim.fr

²²Master CRYPTIS: sciences.unilim.fr/informatique/master-cryptis/

²³Master ACSYON: unilim.fr/acsyon/

²⁴Accordo Università di Pisa – Université de Limoges: accordi-internazionali.cineca.it/accordi.php?continenti=...

Semialgebraic optimization (Univ. Limoges, 2° anno, Laurea Magistrale in Matematica ACSYON):

Nonostante il nome includa la parola “ottimizzazione”, si tratta essenzialmente di un *corso base di geometria algebrica reale*. Principali argomenti trattati: basi di geometria algebrica reale, campi reali chiusi, insiemi semialgebrici, principio di Tarski-Seidenberg, polinomi positivi e loro rappresentazioni in somme di quadrati, teorema di Hilbert del 1888; positività su insiemi semialgebrici, Positivstellensatz di Schmüdgen, Positivstellensatz di Putinar; dualità tra polinomi positivi su insiemi semialgebrici e sequenze di momenti di misure di Borel con supporto sul dato insieme; ottimizzazione polinomiale e metodo di Lasserre.

Probabilità e Statistica (equivalente SSD MAT06)

Probabilités (Univ. Limoges, 2° anno, Laurea in Matematica, Informatica, Fisica, Chimica):

Principali argomenti²⁵ trattati: richiami di combinatorica (disposizioni, combinazioni, permutazioni, concetto di ordine e di ripetizione), introduzione alla probabilità (esperienza aleatoria, evento, insieme universo, indipendenza, probabilità su insiemi finiti, spazio di probabilità, probabilità totali), variabili aleatorie (legge di probabilità, variabili discrete, funzione di ripartizione, variabili continue, densità), distribuzioni discrete (Bernouilli, binomiale, Poisson, ...), distribuzione normale, cenni di statistica descrittiva.

Statistiques inférentielles (Univ. Limoges, 2° anno, Laurea in Matematica):

Principali argomenti trattati: richiami di probabilità e di statistica descrittiva, legge del χ^2 , test di conformità del χ^2 , convergenze (legge, probabilità, media quadratica) e legge debole dei grandi numeri, teorema del limite centrale, teorema di de Moivre-Laplace, campionamento statistico, stima di parametri (stima della media e della varianza), caratteristiche degli stimatori (bias, convergenza, consistenza), metodo della massima verosimiglianza, test di Kolmogorov-Smirnov, intervalli di confidenza, test di omogeneità delle medie, esperienze di laboratorio (LibreOffice, Excel).

Statistiques pour la biologie (Univ. Limoges, 1° anno, Laurea in Biologia / Scienze della Vita):

Principali argomenti trattati: richiami di probabilità di base, leggi discrete e continue, statistica descrittiva in una dimensione (media, mediana, quartili...), scarti - errori - incertezze, statistica descrittiva in dimensione due (marginali, covarianza, coefficiente di correlazione lineare...), regressione lineare, test statistico, test del χ^2 , test parametrici di conformità e omogeneità, esperienze di laboratorio (calcolatrice scientifica).

Statistiques avancées pour biologistes (Univ. Limoges, 2° anno, Laurea in Biologia / Scienze della Vita):

Principali argomenti trattati: distribuzione normale e derivate (χ^2 , Student, Fisher-Snedecor...), studio della normalità (skewness e kurtosis), test di normalità (retta di Henry), test di indipendenza del χ^2 , test d'omogeneità del χ^2 , altre regressioni (multilineari, quadratiche, logaritmiche), intervalli di confidenza per la retta di regressione, primo asse fattoriale, ANOVA a un fattore, test non parametrici per piccoli effettivi (Mann-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis).

Analisi Numerica e Ricerca Operativa (equivalente SSD MAT08 e MAT09)

Analyse numérique 1 et 2 (Univ. Limoges, 3° anno, Laurea in Matematica):

Principali argomenti trattati nel primo modulo: risoluzione di sistemi lineari, metodi diretti (Gauss, LU, Cholesky), norme matriciali, condizionamento, metodi iterativi e convergenza, metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel, metodo del gradiente coniugato, risoluzione di equazioni non-lineari in una variabile, metodo di bisezione, di Newton, e del punto fisso. Principali argomenti trattati nel secondo modulo: interpolazione polinomiale (Lagrange, Neville-Aitken, Hermite, Taylor) e approssimazione di funzioni continue su intervalli (approssimazione uniforme, metodo dei minimi quadrati).

Linear, Quadratic, Semidefinite Programming (Univ. Limoges, 1° anno, Laurea Magist. in Matematica ACSYON):

Principali argomenti trattati: richiami di algebra lineare e geometria convessa, geometria dei poliedri, ottimizzazione lineare, dualità di Lagrange, metodo del simplesso, metodi interior-point; ottimizzazione conica; ottimizzazione quadratica con vincoli di eguaglianza e disequaglianza, condizioni di ottimalità; geometria dell'ottimizzazione semidefinita, spettraedri, metodi interior-point per la SDP.

²⁵Esempio di dispense disponibile al link https://www.unilim.fr/pages_perso/simone.naldi/notesProba/notesProba.pdf

Tabella 1: DETTAGLI QUANTITATIVI DEGLI INSEGNAMENTI EFFETTUATI (DAL 2016). *Legenda per la colonna “Ruolo”:* se indicato “Responsabile”, significa che ho ideato il corso; se indicato “Coresponsabile”, significa che ho partecipato all’ideazione del corso; se indicato “Assistente”, significa che sono intervenuto negli insegnamenti, senza un ruolo determinante nell’ideazione del corso. *Legenda per la colonna “Livello”:* L = Laurea Triennale (tre anni: L1, L2, L3), M = Laurea Magistrale (due anni: M1, M2). *Legenda per le colonne restanti:* CM = Cours Magistraux (ore di teoria), TD = Travaux Dirigés (ore di teoria + esercizi) e TP = Travaux Pratiques (ore di esercizi + lab. informatico).

Université de Limoges						
Anno accademico	Corso	Ruolo	Livello	CM	TD	TP
2020-2021	Systèmes Polinomiaux	Responsabile	M1		3	16
2020-2021	Calcul formel	Responsabile	M1	16		16
2020-2021	Linear/Quad. Prog.	Responsabile	M1		30	
2020-2021	Statistiques inférentielles	Coresponsabile	L2		9	12
2020-2021	Semialgebraic Op.	Responsabile	M2	12	9	9
2020-2021	Analyse numérique 1	Coresponsabile	L3		18	12
2020-2021	Algèbre linéaire 2	Coresponsabile	L2		39	15
2020-2021	Probabilités	Responsabile	L2	6	30	18
2020-2021	Statistiques avancées pour biol.	Coresponsabile	L2		30	
2020-2021	Statistiques pour la biologie	Coresponsabile	L1		48	
2020-2021	Nonlinear Op.	Coresponsabile	M2		24	
2019-2020	Systèmes Polinomiaux	Coresponsabile	M1		3	16
2019-2020	Calcul formel	Responsabile	M1			16
2019-2020	Linear/Semid. Prog.	Responsabile	M1		30	
2019-2020	Analyse numérique 2	Coresponsabile	L3	3		
2019-2020	Statistiques inférentielles	Coresponsabile	L2		9	12
2019-2020	Semialgebraic Op.	Responsabile	M2	12	9	9
2019-2020	Analyse numérique 1	Coresponsabile	L3		18	12
2019-2020	Algèbre linéaire 2	Coresponsabile	L2		39	15
2019-2020	Probabilités	Responsabile	L2	6	30	18
2019-2020	Statistique avancées pour biol.	Coresponsabile	L2		21	
2019-2020	Statistiques pour la biologie	Coresponsabile	L1		48	
2018-2019	Systèmes Polinomiaux	Coresponsabile	M1		3	16
2018-2019	Calcul formel	Responsabile	M1			16
2018-2019	Semidefinite Prog.	Responsabile	M1		30	
2018-2019	Statistiques inférentielles	Coresponsabile	L2		18	12
2018-2019	Semialgebraic Op.	Responsabile	M2	12	9	9
2018-2019	Probabilités	Responsabile	L2	9	21	
2018-2019	Statistiques avancées pour biol.	Coresponsabile	L2		21	
2018-2019	Statistiques pour la biologie	Coresponsabile	L1		21	
2017-2018	Statistiques inférentielles	Coresponsabile	L2		18	12
2017-2018	Semialgebraic Op.	Responsabile	M2	9	6	6
2017-2018	Analyse 1	Assistente	L2		36	
2017-2018	Statistiques pour la biologie	Coresponsabile	L1		33	6
Technische Universität Dortmund						
2016/2017	Zahlentheorie	Assistente	M1		40	
2016/2017	Lineare algebra	Assistente	L2		40	
2015/2016	Algebra	Assistente	L3		40	

Riferimenti bibliografici

- [1] J. Abbott, A.M. Bigatti, and L. Robbiano. CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra. Available at <http://cocoa.dima.unige.it>.
- [2] X. Allamigeon, S. Gaubert, and M. Skomra. Solving generic nonarchimedean semidefinite programs using stochastic game algorithms. *Proceedings of ISSAC 2016, Waterloo, Canada*, 2016.
- [3] S. Basu, R. Pollack, and M-F. Roy. *Algorithms in real algebraic geometry*, volume 10 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, second edition, 2006.
- [4] R. Benedetti and J-J. Risler. *Real algebraic and semialgebraic sets*. Hermann, 1991.
- [5] G. Blekherman, P.A. Parrilo, and R.R. Thomas. *Semidefinite optimization and convex algebraic geometry*, volume 13. SIAM, 2013.
- [6] G. Blekherman, D. Plaumann, R. Sinn, and C. Vinzant. Low-rank sum-of-squares representations on varieties of minimal degree. *arXiv preprint arXiv:1606.04387*, 2016.
- [7] G. Blekherman, G. Smith, and M. Velasco. Sums of squares and varieties of minimal degree. *Journal of the American Mathematical Society*, 29(3):893–913, 2016.
- [8] J. Bochnak, M. Coste, and M-F. Roy. *Real algebraic geometry*, volume 36 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, 1998.
- [9] B. Bonnard, J-C. Faugère, A. Jacquemard, M. Safey El Din, and T. Verron. Determinantal sets, singularities and application to optimal control in medical imagery. In *Proceedings of the ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 103–110, 2016.
- [10] P. Brändén. Obstructions to determinantal representability. *Adv. Math.*, 226(2):1202–1212, 2011.
- [11] L. Chua, D. Plaumann, R. Sinn, and C. Vinzant. Gram spectrahedra. *Ordered algebraic structures and related topics*, 697:81–105, 2016.
- [12] M. Collowald and E. Hubert. Algorithms for computing cubatures based on moment theory. *Studies in Applied Mathematics*, 141(4):501–546, 2018.
- [13] M. Demazure. *Catastrophes et bifurcations*. Ellipses Paris, 1989.
- [14] A. C. Dixon. Note on the reduction of a ternary quantic to a symmetrical determinant. In *Proc. Cambridge Philos. Soc*, volume 5, pages 350–351, 1902.
- [15] I.V. Dolgachev. *Classical algebraic geometry: a modern view*. Cambridge University Press, 2012.
- [16] J. Draisma, E. Horobeţ, G. Ottaviani, B. Sturmfels, and R.R. Thomas. The euclidean distance degree of an algebraic variety. *Foundations of computational mathematics*, 16(1):99–149, 2016.
- [17] D. Eisenbud. Linear sections of determinantal varieties. *American Journal of Mathematics*, 110(3):541–575, 1988.
- [18] B. Eröcal, O. Motsak, F-O. Schreyer, and A. Steenpaß. Refined algorithms to compute syzygies. *Journal of Symbolic Computation*, 74:308–327, 2016.
- [19] S. Friedland and V. Tammali. Low-rank approximation of tensors. In *Numerical algebra, matrix theory, differential-algebraic equations and control theory*, pages 377–411. Springer, 2015.
- [20] D. Goluskin. Bounding averages rigorously using semidefinite programming: mean moments of the lorenz system. *Journal of Nonlinear Science*, 28(2):621–651, 2018.
- [21] H-C. Graf von Bothmer and K. Ranestad. A general formula for the algebraic degree in semidefinite programming. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 41(2):193–197, 2009.
- [22] L. Gårding. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.*, 8(6):957–965, 1959.
- [23] D.R. Grayson and M.E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [24] O. Güler. Hyperbolic polynomials and interior point methods for convex programming. *Math. Oper. Res.*, 22(2):350–377, 1997.
- [25] O. Güler and L. Tunçel. Characterization of the barrier parameter of homogeneous convex cones. *Mathematical Programming*, 81(1):55–76, 1998.
- [26] J.W. Helton and V. Vinnikov. Linear matrix inequality representation of sets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(5):654–674, 2007.

- [27] D. Henrion, S. Naldi, and M. Safey El Din. Real root finding for determinants of linear matrices. *J. of Symbolic Computation*, 74:205–238, 2015.
- [28] D. Henrion, S. Naldi, and M. Safey El Din. Real root finding for rank defects in linear Hankel matrices. In *Proceedings of the 40th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Bath (UK)*, pages 221–228, 2015.
- [29] D. Henrion, S. Naldi, and M. Safey El Din. Exact algorithms for linear matrix inequalities. *SIAM J. Optim.*, 26(4):2512–2539, 2016.
- [30] D. Henrion, S. Naldi, and M. Safey El Din. Real root finding for determinants of linear matrices. *J. Symb. Comput.*, 74:205–238, 2016.
- [31] D. Henrion, S. Naldi, and M. Safey El Din. SPECTRA: a Maple library for solving linear matrix inequalities in exact arithmetic. *Optimization Methods and Software*, 34(1):62–78, 2019.
- [32] D. Henrion, S. Naldi, and M. Safey El Din. Real root finding for low rank linear matrices. *Appl. Algebra Eng. Comm. Comput.*, 31(2):101–133, 2020.
- [33] D. Henrion, S. Naldi, and M. Safey El Din. Exact algorithms for semidefinite programs with degenerate feasible set. *J. Symb. Comput.*, 104:942–959, 2021.
- [34] D. Hilbert. Über die darstellung definiter formen als summe von formenquadraten. *Mathematische Annalen*, 32(3):342–350, 1888.
- [35] M. Ito and B.F. Lourenço. A bound on the carathéodory number. *Linear Algebra and its Applications*, 532:347–363, 2017.
- [36] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311. ACM, 1984.
- [37] V. Khrulkov and I. Oseledets. Desingularization of bounded-rank matrix sets. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 39(1):451–471, 2018.
- [38] M. Kreuzer and L. Robbiano. *Computational commutative algebra*. Number v. 2 in Computational Commutative Algebra. Springer, 2005.
- [39] M. Kummer, S. Naldi, and D. Plaumann. Spectrahedral representations of plane hyperbolic curves. *Pacific Journal of Mathematics*, 303(1):243–263, 2019.
- [40] M. Kummer, D. Plaumann, and C. Vinzant. Hyperbolic polynomials, interlacers, and sums of squares. *Math. Prog.*, 153(1):223–245, 2015.
- [41] A. Kunert. *Facial Structure of Cones of non-negative Forms*. PhD thesis, Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, 2014.
- [42] A. Kunert and C. Scheiderer. Extreme positive ternary sextics. *Transactions of the American Mathematical Society*, 370(6):3997–4013, 2018.
- [43] J-B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM J. Optim.*, 11(3):796–817, 2001.
- [44] P.D. Lax. Differential equations, difference equations and matrix theory. *Comm. Pure Appl. Math.*, 11(2):175–194, 1958.
- [45] M. Longinetti, L. Sgheri, and F. Sottile. Convex hulls of orbits and orientations of a moving protein domain. *Discrete & Computational Geometry*, 43(1):54–77, 2010.
- [46] A.W. Marcus, D. A Spielman, and N. Srivastava. Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem. *Annals of Mathematics*, pages 327–350, 2015.
- [47] M. G. Marinari, H.M. Moeller, and T. Mora. Gröbner bases of ideals defined by functionals with an application to ideals of projective points. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 4(2):103–145, 1993.
- [48] S. Naldi. Nonnegative polynomials and their Carathéodory number. *Discrete and Computational Geometry*, 51(3):559–568, 2014.
- [49] S. Naldi. *Exact algorithms for determinantal varieties and semidefinite programming*. Theses, Université de Toulouse, September 2015.
- [50] S. Naldi. Solving rank-constrained semidefinite programs in exact arithmetic. *J. Symb. Comput.*, 85(C):206–223, 2018.

- [51] S. Naldi and V. Neiger. A divide-and-conquer algorithm for computing Gröbner bases of syzygies in finite dimension. In Ioannis Z. Emiris and Lihong Zhi, editors, *ISSAC '20: International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Kalamata, Greece, July 20-23, 2020*, pages 380–387. ACM, 2020.
- [52] S. Naldi and D. Plaumann. Symbolic computation in hyperbolic programming. *J. Alg. Appl.*, 17(10):1850192, 2018.
- [53] S. Naldi and R. Sinn. Conic programming: infeasibility certificates and projective geometry. *J. Pure Appl. Algebra*, page 106605, 2020.
- [54] Y. Nesterov and A. Nemirovsky. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, volume 13 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [55] J. Nie, K. Ranestad, and B. Sturmfels. The algebraic degree of semidefinite programming. *Mathematical Programming*, 122(2):379–405, 2010.
- [56] R. Oliveira. Conditional lower bounds on the spectrahedral representation of explicit hyperbolicity cones. In *Proceedings of the 45th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 396–401, 2020.
- [57] D. Plaumann, R. Sinn, D. Speyer, and C. Vinzant. Computing Hermitian determinantal representations of hyperbolic curves. *Int. Journal of Algebra and Computation*, 25(8):1327–1336, 2015.
- [58] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana University Mathematics Journal*, 42(3):969–984, 1993.
- [59] P. Raghavendra, N. Ryder, N. Srivastava, and B. Weitz. Exponential lower bounds on spectrahedral representations of hyperbolicity cones. In *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 2322–2332. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019.
- [60] J. Renegar. Hyperbolic programs, and their derivative relaxations. *Found. Comput. Math.*, 6(1):59–79, 2006.
- [61] P. Roux, Y-L. Voronin, and S. Sankaranarayanan. Validating numerical semidefinite programming solvers for polynomial invariants. In *International Static Analysis Symposium*, pages 424–446. Springer, 2016.
- [62] C. Scheiderer. Sums of squares of polynomials with rational coefficients. *Journal of the European Mathematical Society*, 18(7):1495–1513, 2016.
- [63] C. Scheiderer. Semidefinite representation for convex hulls of real algebraic curves. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 2(1):1–25, 2018.
- [64] C. Scheiderer. Spectrahedral shadows. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 2(1):26–44, 2018.

5 Allegati

5.1 Review della tesi di dottorato (B. Sturmfels)

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY

BERKELEY • DAVIS • IRVINE • LOS ANGELES • MERCED • RIVERSIDE • SAN DIEGO • SAN FRANCISCO



SANTA BARBARA • SANTA CRUZ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
925 Evans Hall

BERKELEY, CALIFORNIA 94720-
bernd@math.berkeley.edu

July 20, 2015

Report on the doctoral thesis of **Simone Naldi**,
submitted to the Université de Toulouse

Dear colleagues:

This is my report on the doctoral dissertation of Simone Naldi, titled

Exact algorithms for determinantal varieties and semidefinite programming

Semidefinite programming (SDP) is a paradigm in convex optimization which has gained a lot of prominence in the past two decades. Numerous problems in computer science and engineering are being modeled using semidefinite programming, and there are efficient numerical algorithms known for computing the optimal solution. However, these numerical algorithms have some issues of accuracy, and several fundamental complexity questions concerning semidefinite programming have not yet been answered. This is where symbolic computation and algebraic geometry come in. The feasible regions of semidefinite programming are convex sets, known as spectrahedra, that come with an explicit description in terms of polynomials. This makes them amenable to exact symbolic computations, using Gröbner bases and algorithms from real algebraic geometry.

Simone Naldi's dissertation is precisely at this interface. He is the first to systematically investigate exact algebraic algorithms for semidefinite programs and related questions. His work offers a very precise description of these algorithms, along with a careful analysis of their running time, and an implementation of these algorithms in maple. This is the kind of "complete package" one always desires from a researcher in the symbolic computation community. It can be hoped that this dissertation will be a wake-up call for practitioners of semidefinite programming, in the sense that they should take the exact analysis seriously. It can help them answer crucial questions concerning the lowest rank solutions of an SDP, a topic that is of great importance in many applications. In my view, this dissertation is an excellent piece of work, and I wish to congratulate the author on his accomplishment.

In what follows, I will offer a brief discussion for each of the five chapters.

Chapter 1 reviews the needed preliminaries from algebraic geometry, commutative algebra, real algebra and optimization theory. This material is very thoroughly assembled and presented. When I read it, I thought about handing this dissertation to a first-year PhD student in my own department who plans to work with me. It'll be perfect reading for her.

Chapter 2 gives an extension of the method of polar varieties for the construction of test points on a real algebraic sets. This method is by now well-established when the description of the given set is presented by smooth varieties. Here, this is extended to a (much more realistic) situation that allows for the presence of singularities. The key ingredient underlying this result is a linear change of coordinates, effected by a square matrix M that is chosen in a careful manner from a dense open subset in matrix space.

Chapter 3 concerns determinantal varieties, typically specified by low rank constraints on real symmetric matrices. The main result is an algorithm for determining a rational representation of test points, at least one per connected component, on the real locus of such a variety. These varieties appear as the Zariski closure of rank strata on spectrahedra. This result is fundamental for the main results of the thesis, developed in the next chapter.

Chapter 4 is focused on the computational real algebraic geometry of spectrahedra. The author offers a method for computing test points on the various rank strata in the boundary of a spectrahedron. In particular, he is the first to give an exact algorithm, along with a thorough complexity analysis, for the problem of finding a point of lowest rank in a spectrahedron. The bounds are derived in terms of the multihomogeneous Bézout bound. This is somewhat unsatisfactory because the intrinsic geometry of the problem ought to lead to better bounds. These should involve what is known as the *algebraic degree of semidefinite programming*, or geometrically, polar classes of symmetric determinantal varieties.

Chapter 5 is my personal favorite among the five chapters. Here, the author gets his hands dirty. He presents his Maple package, called *Spectra* which runs the algorithms that were described earlier. He demonstrates the practicality of this software on a range of interesting instances, drawn from the current literature in the field. The tables that are presented gives the reader a very good idea of the current scope of the symbolic methods derived here.

I conclude that this doctoral dissertation is excellent, of the highest quality. In the Latin system, the grade *summa cum laude* would be appropriate for this work. In particular, I advise that the thesis defense of Simone Naldi at Toulouse be scheduled as soon as possible.

With best regards,



Bernd Sturmfels
Professor of Mathematics,
Statistics and Computer Science

5.2 Review della tesi di dottorato (S. Gaubert)



Palaiseau, le 31 Août 2015

Stéphane Gaubert
CMAP, École Polytechnique
Route de Saclay
91128 Palaiseau Cedex France
Tél : +33 1 69 33 46 13
Fax : +33 1 69 33 46 46
e-mail : stephane.gaubert@inria.fr

RAPPORT SUR LE MÉMOIRE DE SIMONE NALDI

présenté pour obtenir le doctorat
de l'Université de Toulouse délivré par l'INSA de Toulouse

Le mémoire de thèse de Simone NALDI est intitulé "Exact algorithms for determinantal varieties and semidefinite programming".

Il présente des contributions portant sur le calcul formel et l'optimisation semi-algébrique, ce qui inclut l'optimisation sous contrainte d'appartenance au cône des matrices symétriques positives, dite programmation semi-définie ou SDP. Il s'agit d'un travail original en raison de son caractère d'interface, qui amène notamment à des résultats nouveaux en optimisation. J'axerai mon rapport sur les résultats obtenus en optimisation, domaine qui m'est le plus familier. Ces résultats sont des retombées de méthodes de calcul formel qui s'appliquent plus généralement aux variétés déterminantales, qui sont le cadre naturel des techniques employées ici.

Motivation et cadre du travail. La programmation semi-définie, ou SDP est un domaine important de l'optimisation moderne, elle permet d'exprimer des contraintes convexes portant sur les valeurs propres de matrices symétriques, et ainsi de traiter une large classe d'applications, de manière efficace en pratique et avec des bornes de complexité théoriques assez favorables. Elle a été employée dans des applications issues de l'automatique (stabilité des systèmes), de la vérification de programme, de la preuve formelle, de la mécanique, des statistiques, et comme technique de relaxation, en optimisation combinatoire et en optimisation semi-algébrique. Elle peut être résolue classiquement à l'aide de la méthode de l'ellipsoïde, d'un intérêt principalement théorique, et surtout par celle des points intérieurs, beaucoup plus efficace en pratique.

Centre de Mathématiques Appliquées
École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cédex, France
et
Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique
Centre de Recherche de Saclay – Île-de-France

Cependant, la compréhension de la complexité de la programmation semi-définie est encore incomplète. En particulier, un problème fondamental en programmation semi-définie consiste à décider si un *spectraèdre*, c'est à dire, l'ensemble \mathcal{S} des vecteurs réels (x_1, \dots, x_n) vérifiant une contrainte de la forme $A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \succeq 0$, où \succeq désigne l'ordre de Loewner, est non-vide. On ne sait pas à ce jour si ce problème peut être résolu en temps polynômial dans le modèle de Turing. Une difficulté est qu'un spectraèdre, même d'intérieur non-vide, peut très bien ne contenir aucun rationnel court. C'est là l'une des obstructions à l'obtention de bornes de complexité polynômiale par exemple par une approche de type ellipsoïde. Par ailleurs, dans le cas SDP, contrairement à la programmation linéaire, les techniques de points intérieurs ne conduisent plus à des algorithmes polynômiaux dans le modèle de Turing, on a seulement des résultats "polynômiaux" concernant des problèmes approchés et dans un modèle arithmétique idéal sur les réels. Ceci est en résonance avec les difficultés à faire fonctionner en pratique les solveurs SDP dans certaines situations dégénérées ainsi qu'avec les limitations des résultats de convergence en points intérieurs (qui demandent typiquement des hypothèses de faisabilité stricte, plus difficiles à assurer dans le cas SDP que dans le cas linéaire). Ces difficultés peuvent se révéler essentielles dans des applications de type vérification ou preuve formelle, ou des certificats exacts sont requis. La question traitée ici, la programmation SDP "exacte", est donc d'un intérêt fondamental en théorie de la complexité des ensembles semi-algébriques, et elle est aussi d'un intérêt pratique indéniable dans des applications en certification. Les principales méthodes exactes disponibles "sur l'étagère" en programmation SDP relèvent de l'algorithmique des ensembles semi-algébriques, elles sont évidemment très coûteuses et ne tiennent pas compte a priori de la structure matricielle. Il est donc d'autant plus pertinent de développer de nouvelles méthodes exactes, ce qui est l'un des principaux propos de ce travail.

Contenu de la thèse et contributions.

L'approche retenue par Simone NALDI ramène le problème SDP à l'étude des variétés déterminantales associées au faisceau $A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$. Pour chaque entier r , la variété déterminantale \mathcal{D}_r est le lieu des points complexes x tels que le rang de $A(x)$ est au plus r , ce qui revient à exiger que tous les mineurs de taille $r+1$ extraits de $A(x)$ s'annulent. En particulier, en prenant $r = m-1$, où m est la taille des matrices considérées, la variété déterminantale n'est autre que lieu des zéros de $\det A(x)$.

La réduction de Simone NALDI repose sur le résultat suivant (Théorème 4.3 du Chapitre 4) : si r est le rang minimal atteint par $A(x)$ sur le spectraèdre \mathcal{S} , alors toute composante connexe de $\mathcal{D}_r \cap \mathbb{R}^n$ qui rencontre \mathcal{S} est toute entière contenue dans \mathcal{S} . Il en résulte qu'il suffit d'être capable de construire, pour chaque composante connexe de la partie réelle de \mathcal{D}_r , un point témoin appartenant à celle-ci, pour trouver un point de \mathcal{S} ou s'assurer que le spectraèdre est vide.

Simone NALDI considère donc plus généralement le problème du calcul de points témoins dans chaque composante connexe de la partie réelle d'une variété déterminantale \mathcal{D}_r , pour des matrices A_0, \dots, A_n qui ne sont pas supposées nécessairement symétriques. Ce problème est bien sûr d'un intérêt intrinsèque qui dépasse le cadre SDP, c'est notamment une extension du problème classique consistant à calculer les valeurs propres réelles d'un faisceau linéaire, qui correspond au cas $n = 1$. Simone NALDI s'est ainsi ramené au problème consistant à trouver des points témoins des différentes composantes connexes d'une variété algébrique réelle ("real root finding"). Celui-ci a été étudié par la communauté du calcul formel. Le présent travail s'appuie sur des idées de variétés polaires développées dans une série de travaux par plusieurs auteurs, et notamment sur un travail de Safey

El Din et Schost (ISSAC, 2003) qui conduit à un algorithme exact de nature probabiliste qui fournit une représentation rationnelles de points témoins pour des composantes connexes de parties réelles de variétés lisses. La composante probabiliste de cette famille d'algorithmes reste légère et n'induit pas d'inconvénient (elle consiste pour l'essentiel en un pré-traitement faisant intervenir par exemple le tirage de matrices ou vecteurs aléatoires, ce qui garantit certaines hypothèses de généricité).

L'application de ces principes au problème déterminantal considéré ici pose de nombreuses difficultés spécifiques, qui sont résolues dans les chapitres 2 et 3.

Tout d'abord, plutôt que de travailler avec les équations données par les mineurs, Simone NALDI travaille avec un relèvement de la variété, appelée, variété d'incidence, d'écrite par des équation bilinéaires, qui généralisent l'équation aux vecteurs propres. En outre, la correction de l'algorithme itératif qui est proposé dépend du fait que l'image par une projection des composantes connexes non-compactes de la partie réelle de la variété déterminantale reste fermée, génériquement. Ceci est établi en exploitant le lien entre caractère propre des projections et normalisation de Noether, en s'inspirant de travaux antérieurs dans le domaine des variétés polaires. L'algorithme de calcul de points témoins de composantes connexes de parties réelles variété déterminantales est décrit au Chapitre 3, et des bornes de complexité précises y sont établies, basées notamment sur des estimations de degré (bornes de Bézout) dans le cas multilinéaire.

L'application au problème SDP est traitée au Chapitre 4, qui revisite / raffine l'algorithme du Chapitre 3 en tenant compte du fait que les matrices sont symétriques. L'algorithme principal du chapitre (DecideLMI) permet de trouver une représentation rationnelle exacte d'un point d'un spectraèdre ou de s'assurer que le spectraèdre est vide. Une caractéristique intéressante de cet algorithme est de produire une solution de rang minimum, alors que les méthodes classiques à base de barrières, comme les points intérieurs, retournent plutôt un "centre" d'une face optimale, dans l'intérieur relatif de celle-ci, qui n'est donc pas de rang minimal dès lors que la face est non-triviale. Par ailleurs, les bornes de complexité font intervenir le rang minimum des points du spectraèdre, ce qui conduit à des bornes originales. Les résultats contenus ici me paraissent constituer aujourd'hui l'état de l'art dans le cas des SDP "exacts", en particulier, si l'on fixe la taille des matrices, on parvient à un algorithme polynômial en le nombre de variables.

Simone NALDI montre aussi que son algorithme peut être raffiné pour mieux passer à l'échelle dans le cas de problèmes structurés, un algorithme amélioré dédié à des matrices ayant une structure Hankel est ainsi présenté.

Le cinquième chapitre décrit la librairie MAPLE SPECTRA, qui implémente les différents algorithmes de la thèse. Elle s'appuie notamment sur le logiciel FGB de calcul de base de Gröbner, et sur des implémentations récentes de l'algorithme FGLM de Faugère et al. pour le calcul de représentations rationnelles. Des tests sur des exemples généraux mais aussi sur des exemples structurés illustrent les algorithmes (calcul de matrices de densités conjointes de variables aléatoires, matrices de Sylvester ou de Hurwitz). Des instances générales de taille 4×4 avec une dizaine de variables sont traitables, alors qu'elles ne le sont pas avec des méthodes plus générales, comme RAGLIB (real algebraic geometry library de Safey El Din). Ces dimensions ne peuvent ni ne doivent être comparées aux dimensions typiques traitées en points intérieurs (quelques milliers), car la difficulté du problème de calcul exact traité ici est sans commune mesure. Par ailleurs, les dimensions sont déjà appréciables en vue de certaines applications en certification. Les expériences montrent aussi que des exemples hautement dégénérés de spectraèdres (spectraèdre de Scheiderer, qui n'a

aucun point rationnel) peuvent être traités.

Les résultats de thèse correspondent à quatre articles, rédigés avec les coencadrants de thèse : les résultats du Chapitre 2 et 3 sur le calcul des variétés déterminantales, dans le cas où le rang r est $m - 1$, est accepté dans J. Symbolic Computation, l'extension (chapitre 3) au cas où r est quelconque fait l'objet d'un article soumis à J. Complexity, les résultats du chapitre 4 vont être soumis à SIAM J. Optimization, et les résultats sur les matrices de Hankel sont parus dans les actes de la conférence ISSAC. Ainsi, les contributions sont acceptées ou soumises dans les meilleurs supports des domaines concernés.

Une liste de problèmes ouverts montre aussi la capacité à dégager des directions de recherche pertinentes. Enfin, j'ai apprécié le soin apporté à la confection du manuscrit. Le chapitre 1 fournit ainsi des rappels de géométrie algébrique effective (ensembles algébriques et semi-algébriques, notions de transversalité, bases de Gröbner, paramétrisations rationnelles, ...) et aussi d'optimisation qui ont le mérite de rendre le travail plus accessible pour un public généraliste. Certains résultats plus avancés (ce qui touche aux variétés polaires et à la technique détaillée du calcul de représentations rationnelles) sont rappelés de manière plutôt brève. Quelques dessins supplémentaires pour illustrer des résultats importants d'apparence technique (par exemple, le théorème de décomposition 2.1) auraient sans doute pu aider le lecteur non expert du calcul formel. Il reste que l'effort d'exposition est appréciable et que l'exposé est clair.

Synthèse. Simone NALDI a réalisé un travail original à l'interface du calcul formel et de l'optimisation. Il applique avec fruit les techniques les plus avancées du premier domaine pour traiter un problème important du second, la programmation semi-définie exacte. Cela conduit à des algorithmes nouveaux en optimisation semi-définie, qui amènent à un progrès théorique en terme de borne de complexité et d'algorithmique, et qui est aussi d'un intérêt pratique indéniable, avec une implémentation utilisable qui permet de traiter des exemples significatifs. L'intérêt du travail, pour la communauté des optimiseurs tient aussi au caractère novateur de la démarche, puisque les outils sont tout à fait différents de ceux usuellement employés dans ce domaine (comme les points intérieurs). Ce travail devrait donc susciter des prolongements. Enfin, la qualité académique du travail est attestée par le très bon niveau des journaux et conférences dans lesquels les résultats sont acceptés ou soumis. Je recommande sans hésitation la soutenance de cette thèse.



Stéphane Gaubert
Directeur de Recherche INRIA
Professeur chargé de cours à l'École Polytechnique