

ALLEGATO B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

selezione pubblica per n._1_ posto/i di Ricercatore a tempo determinato ai sensi dell'art.24, comma 3, lettera a) della Legge 240/2010 per il settore concorsuale __01/A3_____, settore scientifico-disciplinare _MAT/05_____, presso il Dipartimento di _Matematica "Federigo Enriques"_____, (avviso bando pubblicato sulla G.U. n. __75__ del _21/09/2021____) Codice concorso _4837__

Mattia Calzi **CURRICULUM VITAE**

INFORMAZIONI PERSONALI

COGNOME	CALZI
NOME	MATTIA
DATA DI NASCITA	22/05/91

TITOLI

TITOLO DI STUDIO

Laurea Magistrale in Matematica, conseguita presso l'Università degli Studi di Genova il 22/07/2015, con votazione di 110/110 e lode.
Titolo della tesi: Asymptotic Estimates on the Heisenberg Group
Relatore: Prof. G. Mauceri; Correlatrice: Prof.ssa F. Astengo

TITOLO DI DOTTORE DI RICERCA O EQUIVALENTI, OVVERO, PER I SETTORI INTERESSATI, DEL DIPLOMA DI SPECIALIZZAZIONE MEDICA O EQUIVALENTE, CONSEGUITO IN ITALIA O ALL'ESTERO

Diploma di Perfezionamento (Ph.D.) in Matematica, conseguito con lode presso la Scuola Normale Superiore (Pisa) il 14/01/2019.
Titolo della tesi: Functional Calculus on Homogeneous Groups
Relatore: Prof. F. Ricci

CONTRATTI DI RICERCA, ASSEGNI DI RICERCA O EQUIVALENTI

Assegnista di Ricerca presso la Scuola Normale Superiore (Pisa), 02/11/18-01/11/19, "Moltiplicatori spettrali di famiglie di operatori differenziali su gruppi di Lie" nell'ambito del programma di ricerca "Analisi armonica" di cui sono responsabili i proff. F. Ricci e L. Ambrosio, presso la Classe di Scienze. Referenti scientifici: proff. F. Ricci e L. Ambrosio.

Assegnista di Ricerca presso la Scuola Normale Superiore (Pisa), 02/11/19-28/02/20, "Moltiplicatori spettrali di famiglie di operatori differenziali su gruppi di Lie" nell'ambito del progetto PRIN 2015 "Real and Complex Manifolds: Geometry, Topology and Harmonic Analysis" (codice 2015A35N9B_001). Referenti scientifici: proff. F. Ricci e L. Ambrosio.

Assegnista di Ricerca presso l'Università degli Studi di Milano, 01/03/20-presente, con assegno di ricerca di tipo A "Analisi armonica su gruppi di Lie, varietà Riemanniane e sub-Riemanniane, analisi nello spazio tempo-frequenza" su fondi di ateneo. Docente responsabile: prof. M. M. Peloso.

ATTIVITÀ DIDATTICA A LIVELLO UNIVERSITARIO IN ITALIA O ALL'ESTERO

aa.aa. 2015/2016, 2016/2017, 2017/2018: tutorato per il corso Complementi di Matematica presso la Scuola Normale Superiore, 40 ore annuali.

a.a. 2020/2021: tutorato per il corso Analisi Matematica 3 presso il dipartimento di Matematica "Federigo Enriques" dell'Università degli Studi di Milano, 40 ore.

a.a. 2020/2021: tutorato per il corso Analisi Matematica 2 presso il dipartimento di Fisica "Aldo Pontremoli" dell'Università degli Studi di Milano, 20 ore.

DOCUMENTATA ATTIVITÀ DI FORMAZIONE O DI RICERCA PRESSO QUALIFICATI ISTITUTI ITALIANI O STRANIERI

Soggiorno (con borsa, numero di riferimento 2124q) presso il *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, all'interno del programma *Research in Pairs*, in collaborazione col Dott. T. Bruno. a.a. 2020/2021, 13-26/06/21.

ORGANIZZAZIONE, DIREZIONE E COORDINAMENTO DI GRUPPI DI RICERCA NAZIONALI E INTERNAZIONALI, O PARTECIPAZIONE AGLI STESSI

Partecipante del progetto PRIN 2015 "*Real and Complex Manifolds: Geometry, Topology and Harmonic Analysis*" (codice 2015A35N9B_001).

Membro del Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni (GNAMPA) dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica (Indam) dal 2018.

Partecipante del progetto GNAMPA 2020 "*Fractional Laplacians and subLaplacians on Lie groups and trees*".

ATTIVITÀ DI RELATORE A CONGRESSI E CONVEGNI NAZIONALI E INTERNAZIONALI

Seminari su invito (presso convegni o Università):

- Young Researchers Workshop in Harmonic Analysis, 13/04/18, Politecnico di Torino, "Spectral Multipliers on Stratified Groups";
- Giornata Conviviale di Seminari, 29/05/18, Università di Genova, "Moltiplicatori spettrali su gruppi stratificati";
- First Joint Meeting UMI-SIMAI-PTM, 19/09/18, Università di Wroclaw (Polonia), "Spectral Multipliers on Stratified Groups";
- Varietà Reali e Complesse: Geometria, Topologia ed Analisi Armonica, 22/02/19, Scuola Normale Superiore (Pisa), "Functional Calculus on Homogeneous Groups";
- 25/02/19, Università di Padova, "Functional Calculus on Homogeneous Groups";
- XXI Congresso UMI, 07/09/19, Università di Pavia, "Moltiplicatori spettrali su gruppi stratificati";
- Math Young Researchers Meeting, 08/11/19, Università di Genova, "On the definition of Convolution";
- Seminar on Complex Analysis and Allied Topics, 17/12/20, Online, "Holomorphic Function Spaces on Siegel Domains";
- Geometric Aspects of Complex and Harmonic Analysis, 17-18/01/21, Bologna.

Altri seminari all'interno di convegni:

- XXXVII Convegno Nazionale di Analisi Armonica, 24/05/17, Bressanone, "Moltiplicatori spettrali su gruppi omogenei";
- Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis, 07/05/18, Banach Center of Mathematics, Bedlewo (Polonia), "Spectral Multipliers on Stratified Groups";
- XXXIX Convegno Nazionale di Analisi Armonica, 03/06/20, Online, "Non-Homogeneous Functional Calculus on Nilpotent Groups";

– XL Convegno Nazionale di Analisi Armonica, 28/05/21, Online, “Boundary Values of Weighted Bergman Spaces on Homogeneous Siegel Domains”.

PRODUZIONE SCIENTIFICA

PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE

- 1) T. Bruno, M. Calzi, *Weighted sub-Laplacians on Métivier Groups: Essential Self-Adjointness and Spectrum*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), p. 3579-3594.
- 2) T. Bruno, M. Calzi, *Asymptotics for the Heat Kernel on H-Type Groups*, Ann. Mat. Pur. Appl. **197** (2018), p. 1017-1049.
- 3) Calzi, *Spectral Multipliers on 2-Step Stratified Groups, II*, J. Geom. Anal. (2019), <https://doi.org/10.1007/s12220-019-00208-0>.
- 4) Calzi, *Spectral Multipliers on 2-Step Stratified Groups, I*, J. Fourier Anal. Appl. **26** (2020), <https://doi.org/10.1007/s00041-020-09740-y>.
- 5) M. Calzi, F. Ricci, *Functional Calculus on Non-Homogeneous Operators on Nilpotent Groups*, Ann. Mat. Pur. Appl. **200** (2021), p. 1517-1571.
- 6) M. Calzi, M. M. Peloso, *Holomorphic function spaces on homogeneous Siegel domains*, Diss. Math. **563** (2021), p. 1-168.
- 7) M. Calzi, M. M. Peloso, *Toeplitz and Cesàro-type operators on homogeneous Siegel domains*, Complex Var. Elliptic, <https://doi.org/10.1080/17476933.2021.1985478>.
- 8) M. Calzi, M. M. Peloso, *Carleson and Reverse Carleson Measures on Homogeneous Siegel Domains*, 2021, Complex Anal. Oper. Th. (accettato).

TESI DI DOTTORATO

- 9) M. Calzi, *Functional Calculus on Homogeneous Groups*, 2019.

PREPRINT INVIATI PER LA PUBBLICAZIONE

- 10) E. Bruè, M. Calzi, G. Comi, G. Stefani, *A Distributional Approach to Fractional Sobolev Spaces and Fractional Variation: Asymptotics II*, 2020, [arXiv:2011.03928](https://arxiv.org/abs/2011.03928).
- 11) M. Calzi, T. Bruno, *Schrödinger operators on Lie groups with purely discrete spectrum*, 2021, [arXiv:2108.01953](https://arxiv.org/abs/2108.01953).
- 12) M. Calzi, *Besov Spaces of Analytic Type: Interpolation, Convolution, Fourier Multipliers, Inclusions*, 2021, [arXiv:2109.09402](https://arxiv.org/abs/2109.09402).

LAVORI IN PREPARAZIONE

- 13) M. Calzi, *Paley-Wiener Theorems on Quadratic CR Manifolds*.
- 14) M. Calzi, M. M. Peloso, *Paley-Wiener Spaces on Siegel CR Manifolds*.

ATTIVITÀ DI VALUTAZIONE

Referee per le riviste:

- Journal of Approximation Theory;
- Journal of Geometric Analysis;
- Journal of Mathematical Analysis and Applications;
- Journal of Operator Theory.

Reviewer per Mathematical Reviews.

Data

21/10/21

Luogo

Casarza Ligure (GE)

Breve descrizione delle tematiche di ricerca trattate

Stime asintotiche del nucleo del calore su gruppi di tipo H (con T. Bruno)

Dato un operatore differenziale positivo e ipoellittico \mathcal{L} su una varietà M munita di una forma dispari di volume ω , il corrispondente semigruppato del calore $(e^{-t\mathcal{L}})_{t>0}$ gioca sovente un ruolo importante nello studio di varie proprietà di \mathcal{L} , M e ω . In varie occasioni è possibile determinare l'azione di $e^{-t\mathcal{L}}$ su una vasta classe di funzioni mediante un nucleo integrale p_t , il nucleo del calore. Dato che l'espressione esplicita di p_t non è in generale disponibile, risulta spesso rilevante ottenere delle stime asintotiche di p_t per $t \rightarrow 0$ dotate di una ragionevole uniformità nei rimanenti parametri. A tal proposito sono state ottenute stime gaussiane con vari livelli di precisione in diversi contesti.

Nel caso in cui M sia un gruppo G di tipo H , ω una misura di Haar e \mathcal{L} il sub-Laplaciano standard, è possibile dare una rappresentazione quasi esplicita del nucleo integrale p_t (cf. [35, Teorema 1 del § 4]). In queste circostanze, numerosi lavori hanno portato a stime sempre più precise e uniformi di p_t e delle sue derivate, per $t \rightarrow 0$ (cf. [35, Teorema 2 del § 3], [39, Teoremi 1.1 e 1.3], [10, Teoremi 2.42 e 2.46], [32], [43]).

Abbiamo ottenuto stime asintotiche ottimali e uniformi di p_t per $t \rightarrow 0$, nonché di una classe particolarmente significativa delle sue derivate. Mediante tali stime, è in linea di principio possibile ottenere stime uniformi (anche se non necessariamente ottimali) di ogni derivata di p_t per $t \rightarrow 0$.

Come applicazione di tali stime, è stata fornita una nuova dimostrazione di un risultato di J. Inglis [41] secondo cui l'operatore di tipo Ornstein Uhlenbeck costruito a partire dal "gradiente orizzontale" rispetto alla misura avente densità e^{-p_t} rispetto alla misura di Haar su G ha spettro discreto.

Moltiplicatori spettrali su gruppi di Lie

Sia \mathcal{L} un operatore a coefficienti costanti su \mathbb{R}^n . Allora la trasformata di Fourier \mathcal{FL} di \mathcal{L} è un polinomio: usando questo fatto è spesso possibile studiare varie proprietà dell'operatore \mathcal{L} , equazioni ad esso associate, ecc. In particolare, risulta in una certa misura agevole studiare le *funzioni* di tale operatore, interpretando $m(\mathcal{L})$ come la distribuzione temperata la cui trasformata di Fourier è $m \circ \mathcal{FL}$. Più precisamente, $m(\mathcal{L})$ va interpretato come l'*operatore di convoluzione* con nucleo $\mathcal{F}^{-1}(m \circ \mathcal{FL})$. Si va così delineando una "trasformata spettrale" che ad una certa classe di moltiplicatori m associa dei nuclei di convoluzione $\mathcal{K}(m) = \mathcal{F}^{-1}(m \circ \mathcal{FL})$.

Nel caso sia necessario lavorare con degli operatori differenziali invarianti a sinistra $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$ su un gruppo di Lie G (generalmente non commutativo), la trasformata di Fourier risulta assai meno maneggevole che nel caso abeliano, sicché la trasformata spettrale ricavata in precedenza potrebbe risultare preferibile, seppure solo in alcuni contesti. Ad esempio, affinché sia possibile definire una trasformata spettrale del tipo precedente con proprietà ragionevoli, è necessario che gli operatori $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$ fissati commutino tra di loro in un senso opportuno. È naturale domandarsi quali affinità presenti la trasformata spettrale \mathcal{K} così introdotta rispetto alla trasformata di Fourier (inversa) del caso di \mathbb{R}^n , che risulta essere la trasformata spettrale associata agli operatori $-i\partial_1, \dots, -i\partial_n$.

Ad esempio:

1. esiste una misura "di Plancherel" β su \mathbb{R}^k tale che \mathcal{K} induca un isomorfismo isometrico da $L^2(\beta)$ in $L^2(G)$?
2. se una tale misura di Plancherel β esiste, esiste $\chi \in L^\infty(\beta \otimes \nu_G)$, ove ν_G indica una misura di Haar destra su G , tale che

$$\mathcal{K}(m)(g) = \int_{\mathbb{R}^k} m(\lambda) \chi(\lambda, g) d\beta(\lambda)$$

per quasi ogni $g \in G$ e per ogni $m \in L^1(\beta)$?

3. se tale χ esiste, lo si può prendere continuo?
4. vale una proprietà di tipo Riemann–Lebesgue, nel senso che se $\mathcal{K}(m) \in L^1(G)$ allora si può prendere $m \in C_0(\mathbb{R}^k)$?
5. se G è un gruppo a crescita polinomiale del volume, sicché si può definire in maniera “naturale” lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(G)$ su G , è vero che \mathcal{K} associa ai moltiplicatori di Schwartz dei nuclei anch’essi di Schwartz?
6. nel caso il punto precedente abbia risposta affermativa, è vero che se $\mathcal{K}(m) \in \mathcal{S}(G)$ allora si può prendere $m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$?

Ciascuna delle precedenti domande ha, in generale, risposta negativa. È tuttavia possibile determinare alcune classi di (famiglie di) operatori per cui talune delle domande precedenti abbiano risposta affermativa, come la **1**, la **2** e la **5** (cf. [27, Proposizione 3], [51, Teorema 3.2.7], [70, Teorema 2.11], [40], [71], [51, Proposizione 4.2.1]). Per quanto concerne la **6**, sono state fornite alcune condizioni sufficienti nel caso in cui gli operatori soddisfacciano alcune condizioni di invarianza aggiuntive (cf. [8], [9], [33], [34]) o nel caso di sub-Laplaciani su un’ampia classe di gruppi (cf. [54]).

L’estensione del problema precedentemente accennato è stata ridotta al caso di gruppi con una struttura debitamente semplice (i gruppi omogenei) e di operatori che rispettino adeguatamente tale struttura (operatori omogenei). In queste circostanze, è stato completato un risultato di A. Martini [51, Proposizione 3.6.3] fornendo una caratterizzazione delle famiglie di operatori omogenei per cui la trasformata spettrale \mathcal{K} mandi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ in $\mathcal{S}(G)$. Sotto tali condizioni era già nota l’esistenza di una misura di Plancherel β , mentre l’esistenza del nucleo integrale χ si deduce facilmente estendendo le tecniche già impiegate da L. Tolomeo [70, Teorema 2.11].

Successivamente, sono stati esaminati alcuni esempi per verificare quali delle rimanenti proprietà fossero verificate. Già nel caso dei gruppi abeliani è stato possibile riscontrare famiglie di operatori variamente patologiche. Ad esempio, è possibile costruire due operatori di ordine 8 su \mathbb{R}^2 , polinomi in ∂_1^2 e ∂_2^2 , e due moltiplicatori i cui nuclei associati risultano essere, rispettivamente, ∂_1^2 e ∂_2^2 . Siccome tali moltiplicatori non possono essere presi continui, le proprietà **3**, **4** e **6** risultano violate.

Seppure l’esempio precedente mostri che la proprietà **6** non può valere su ogni gruppo abeliano (per quanto semplice), è possibile in ogni caso dimostrare che l’insieme $\mathcal{K}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^k))$ dei nuclei corrispondenti a moltiplicatori di Schwartz è chiuso in $\mathcal{S}(G)$, per lo meno nel caso in cui G sia abeliano. Questo risultato, benché parziale, presenta già alcune applicazioni allo studio delle corrispondenze tra moltiplicatori di tipo Mihlin e nuclei di tipo Calderón-Zygmund.

Sempre nel caso dei gruppi abeliani, è possibile caratterizzare gli operatori \mathcal{L} per cui la proprietà **6** è verificata (in questo caso si considera quindi la trasformata spettrale associata ad *un singolo operatore*): supponendo per comodità che \mathcal{L} sia un operatore di Rockland (condizione necessaria) positivo (ipotesi ragionevole eccetto che nel caso in cui G sia \mathbb{R}), la proprietà **6** è verificata se e solo se \mathcal{L} non è una potenza propria di un altro operatore positivo. Ad esempio, ∂^2 su \mathbb{R} soddisfa la proprietà **6** in quanto è sì il quadrato di ∂ , ma ∂ non è positivo; al contrario, ∂^4 non soddisfa la proprietà **6**.

Nel caso di un solo operatore (anche su gruppi non abeliani, ma comunque omogenei), la proprietà **3**, e di conseguenza la **4**, è sempre verificata.

Passando a gruppi non abeliani, sono stati studiati alcuni esempi sul gruppo di Heisenberg \mathbb{H}^n . Supponiamo che $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{k-1}$ siano dei sub-Laplaciani omogenei su \mathbb{H}^n , e che \mathcal{L}_k sia $-iT$, ove T è una base del centro dell’algebra di Lie di \mathbb{H}^n . Consideriamo quindi la trasformata spettrale associata alla famiglia $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k, -iT)$. Allora le proprietà **1**, **2** e **4** sono verificate. Inoltre, sono fatti equivalenti:

- (i) la proprietà **3** è verificata;
- (ii) la proprietà **4** è verificata;
- (iii) la proprietà **6** è verificata;

(iv) se $\mathcal{K}(m)$ è supportato nell'origine,¹ allora è possibile prendere m polinomiale.

Inoltre, nel caso in cui le condizioni precedenti non siano soddisfatte, è possibile trovare dei moltiplicatori $m_1, \dots, m_{k'}$ tali che:

- $\mathcal{L}'_1 := \mathcal{K}(m_1), \dots, \mathcal{L}'_{k'} := \mathcal{K}(m_{k'})$ siano dei sub-Laplaciani omogenei;
- la (trasformata spettrale associata alla) famiglia $(\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_{k'}, -iT)$ soddisfaccia tutte le proprietà **1–6**;
- $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$ siano combinazioni lineari di $\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_{k'}$.

Di conseguenza, se una famiglia come quella considerata nel teorema precedente non soddisfa le proprietà **3**, **4** e **6**, allora è sempre possibile trovare una famiglia “funzionalmente equivalente” che soddisfa tali proprietà. Sfortunatamente, non è al momento noto se l'esistenza di un “completamento”, nel senso dell'equivalenza funzionale, esista sempre (più precisamente, se esista *finito*); in ogni caso, sono noti esempi di famiglie “complete” che non soddisfano la proprietà **6**.

Infine, relativamente alla proprietà di Riemann–Lebesgue (la **4**), è possibile stabilire quanto segue. Detta $L^1_{(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k)}$ l'algebra dei nuclei L^1 , cioè l'insieme dei nuclei $\mathcal{K}(m)$ che appartengono ad $L^1(G)$, è possibile definire in modo canonico una mappa propria dallo spettro Σ di $L^1_{(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k)}$ in \mathbb{R}^k . La proprietà di Riemann–Lebesgue è allora verificata se e solo se tale mappa è iniettiva. Di conseguenza, i problemi di continuità che possono presentarsi nei moltiplicatori associati a nuclei L^1 derivano da una sorta di sovrapposizione tra i valori “natural” che assumerebbero su Σ in punti aventi la medesima immagine.

Tali risultati sono stati estesi ed ampliati a diverse famiglie di operatori su gruppi di passo 2.

Contrazioni di gruppi nilpotenti (con F. Ricci)

In [57], A. Nagel, F. Ricci ed E. M. Stein hanno ricavato sviluppi asintotici di opportune soluzioni fondamentali di operatori “universalmente ipoellittici” su gruppi di Lie nilpotenti e semplicemente connessi servendosi dello strumento delle “contrazioni”. Nel loro approccio, Nagel, Ricci e Stein considerano un gruppo di Lie nilpotente e semplicemente connesso G e lo reinterpretano come il quoziente di un opportuno gruppo graduato \tilde{G} mediante un suo sottogruppo normale I . Il sottogruppo I viene quindi sottoposto all'azione delle dilatazioni naturali di \tilde{G} , dando luogo ai sottogruppi $I_s := s^{-1} \cdot I$, $s > 0$. Di tale famiglia di sottogruppi vengono quindi considerati i limiti a 0 ed ∞ , denotati con I_0 ed I_∞ , rispettivamente; tali limiti risultano essere dei sottogruppi normali *graduati*. Conseguentemente, detto G_s il quoziente di \tilde{G} modulo I_s , $s \in [0, \infty]$, si ha che G_s è isomorfo a $G = G_1$ per $s \in]0, \infty[$, mentre G_0 e G_∞ hanno una struttura naturale di gruppo graduato. I gruppi G_0 e G_∞ sono le contrazioni, “locale” e “globale”, rispettivamente, di G .

Un operatore differenziale invariante a sinistra \mathcal{L} su G è detto “universalmente ipoellittico” (cfr. [57]) se esiste un operatore di Rockland (cioè omogeneo e ipoellittico) $\tilde{\mathcal{L}}$ su \tilde{G} la cui immagine tramite il differenziale della proiezione su G è \mathcal{L} . Sono, ad esempio, operatori universalmente ipoellittici gli operatori del tipo $\sum_j (iX_j)^{2\alpha_j}$, ove (X_j) è una famiglia finita di campi vettoriali invarianti a sinistra che genera l'algebra di Lie di G , mentre gli α_j sono interi ≥ 1 .

Detto \mathcal{L}_s l'operatore differenziale invariante a sinistra su G_s corrispondente ad $\tilde{\mathcal{L}}$ ($s \in [0, \infty]$), restano di conseguenza indotte delle soluzioni fondamentali (log-)omogenee K_0 e K_∞ di \mathcal{L}_0 ed \mathcal{L}_∞ su G_0 e G_∞ , rispettivamente. Mediante un'operazione di passaggio al quoziente a partire da una soluzione fondamentale (log-)omogenea di $\tilde{\mathcal{L}}$ su \tilde{G} , Nagel, Ricci e Stein hanno determinato una soluzione fondamentale K di \mathcal{L} su G , ed hanno dimostrato che:

- $K(x) = \sum_{k < N} K_{\infty, N}(x) + O\left(|x|_\infty^{-Q_\infty + \delta - N} \log(|x|_\infty)\right)$ per $x \rightarrow \infty$ in G_∞ (identificato con G mediante la scelta di un opportuno supplemento graduato di I e I_∞), ove $K_{\infty, 0} = K_\infty$, $K_{\infty, k}$ è una funzione (log-)omogenea di grado $-Q_\infty + \delta - k$, Q_∞ è la dimensione omogenea di G_∞ , δ è l'ordine di omogeneità di $\tilde{\mathcal{L}}$, e $|\cdot|_\infty$ è una norma omogenea su G_∞ ;

¹In altre parole, l'operatore di convoluzione associato è un operatore differenziale.

- $K(x) = P(x) + \sum_{k < N} K_{\infty, N}(x) + O(|x|_0^{-Q_0 + \delta + N} \log(|x|_0))$ per $x \rightarrow 0$ in G_0 (identificato con G mediante la scelta di un opportuno supplemento graduato di I e I_0), ove $K_{0,0} = K_0$, P è somma di polinomi omogenei di grado al più $-Q_0 + \delta - 1$, $K_{0,k}$ è una funzione (log-)omogenea di grado $-Q_0 + \delta + k$, Q_0 è la dimensione omogenea di G_0 e $|\cdot|_0$ è una norma omogenea su G_0 .

Abbiamo quindi impiegato le tecniche di contrazione sviluppate in [57] per studiare funzioni più generali di \mathcal{L} , come le potenze complesse (potenziali di Riesz) nel caso in cui $\tilde{\mathcal{L}} + \tilde{\mathcal{L}}^*$ sia un operatore di Rockland positivo, oppure funzioni soddisfacenti condizioni di Mihlin di ordine infinito, nel caso in cui $\tilde{\mathcal{L}}$ sia formalmente autoaggiunto.

Benché i risultati ottenuti siano simili nello spirito a quelli presentati in [57], le tecniche impiegate per ottenerli sono differenti: mentre in [57] la soluzione fondamentale K e i termini successivi degli sviluppi ottenuti erano definiti mediante delicate operazioni di passaggio al quoziente a partire da una soluzione fondamentale omogenea di $\tilde{\mathcal{L}}$ su \tilde{G} , nel nostro caso l'analisi del passaggio al quoziente è ridotta quasi unicamente allo studio dei nuclei del calore $(h_{s,t})_{t>0}$ degli operatori \mathcal{L}_s , così come alle loro derivate in s , debitamente definite.

In alcuni casi specifici, è stato altresì possibile dare delle interpretazioni dei termini successivi degli sviluppi considerati – nel caso considerato sopra, delle funzioni $K_{\infty,k}$ e $K_{0,k}$ per $k = 1, 2, \dots$ – in termini di \mathcal{L} e delle potenze complesse di \mathcal{L}_∞ e \mathcal{L}_0 .

Seguendo, inoltre, il procedimento adottato in [51, 52], è stato dimostrato un teorema di limitatezza L^p per moltiplicatori di tipo Mihlin–Hörmander con condizione di regolarità di ordine $\frac{Q_G}{2}$, ove Q_G è la dimensione di crescita del volume – in altre parole, detta ν la misura di Haar su G e dato un intorno compatto U di 0 in G , si ha $\nu(U^n) \asymp n^{Q_G}$ per $n \rightarrow \infty$. Tale risultato generalizza [51, Teorema 5.2.6] al caso di operatori non necessariamente omogenei, ma non è necessariamente ottimale. Vi sono, infatti, numerosi risultati che per opportune classi di operatori omogenei presentano teoremi di limitatezza L^p per moltiplicatori di tipo Mihlin–Hörmander con condizione di regolarità di ordine strettamente inferiore, fino ad arrivare alla semidimensione euclidea dello spazio soggiacente (cfr., ad esempio, [51, 52, 53]).

Per quanto riguarda il caso di operatori non omogenei, vi è un risultato per sub-Laplaciani quasi-omogenei su un gruppo omogeneo G , cioè somma di quadrati di campi vettoriali omogenei, dovuto ad A. Sikora [65] il quale impone condizioni lievemente più deboli sulla regolarità del moltiplicatore, sviluppando alcune tecniche elaborate da G. Alexopoulos [1]. Uno degli ingredienti fondamentali di tale procedimento si basa sull'analisi della misura di Plancherel spettrale associata al sub-Laplaciano quasi-omogeneo \mathcal{L} , sviluppata all'interno di [65] e basata sullo studio di opportuni prolungamenti analitici del valore del nucleo del calore associato nell'identità. Tali procedimenti sono stati fruttuosamente impiegati per studiare più generali somme di potenze pari \mathcal{L} di campi vettoriali omogenei su G , determinando analoghe proprietà della misura di Plancherel spettrale di \mathcal{L} . Un analogo teorema di limitatezza L^p per moltiplicatori di \mathcal{L} è stato ottenuto in alcuni contesti impiegando le tecniche introdotte in [37, 38] e sviluppate in [51, 52].

Spazi BV frazionari (con E. Bruè, G. E. Comi e G. Stefani)

In un recente articolo, [29], G. E. Comi e G. Stefani hanno introdotto gli spazi BV^α , $\alpha \in [0, 1]$, come versioni frazionarie dello spazio classico delle funzioni a variazione limitata su \mathbb{R}^n . La motivazione principale di tale definizione era quella di introdurre una nozione di perimetro frazionario (alla Caccioppoli), estendendo quella introdotta in [26] e basata sugli spazi di Gagliardo $W^{\alpha,1}$ (noti anche come spazi di Sobolev–Slobodeckij, o come gli spazi di Beza $B_{1,1}^\alpha$). Precisamente, la seminorma di Gagliardo è definita come segue:

$$[f]_{W^{\alpha,1}} := \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{n+\alpha}} dx dy.$$

Si definisce quindi $W^{\alpha,1} = \{f \in L^1 : [f]_{W^{\alpha,1}} < \infty\}$, mentre l' α -perimetro frazionario di un insieme misurabile E è $[\chi_E]_{W^{\alpha,1}}$.

Sfortunatamente, la seminorma di Gagliardo di una funzione f non ammette un'interpretazione semplice in termini della norma L^1 di un opportuno gradiente frazionario di f ; di conseguenza, la

nozione di α -perimetro frazionario sopra menzionata non ammette una semplice caratterizzazione “distribuzionale”, contrariamente alla classica nozione di perimetro. Con l’obiettivo di introdurre una tale caratterizzazione distribuzionale, Comi e Stefani hanno considerato il gradiente frazionario ∇^α , sostanzialmente definito come $\nabla(-\Delta)^{(1-\alpha)/2}$ (cfr., ad esempio, [64, 66] ed i riferimenti al loro interno), ed hanno definito BV^α come lo spazio delle $f \in L^1$ tali che $\nabla^\alpha f$ sia una misura limitata. Hanno quindi introdotto e studiato la corrispondente nozione di α -perimetro di Caccioppoli frazionario.

Abbiamo quindi considerato alcune proprietà della famiglia di spazi di Banach (BV^α) in relazione al loro comportamento al limite nei casi $\alpha \rightarrow 0^+$. Il nostro punto di partenza è stata la descrizione del comportamento asintotico della seminorma di Gagliardo presentata in [24, 55], secondo cui esiste una costante (esplicita) $c > 0$ tale che

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha[f]_{W^{\alpha,1}} = c \|f\|_{L^1}$$

per ogni $f \in \bigcup_{\beta \in]0,1[} W^{\beta,1}$. Abbiamo dimostrato due generi di risultati. Da una parte, per $f \in BV^\beta$ per qualche $\beta > 0$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} |\nabla^\alpha f|(\mathbb{R}^n) = c' \left| \int f(x) dx \right|,$$

per un’opportuna costante (esplicita) $c' > 0$. Dall’altra parte, se $f \in BV^\beta \cap BV^0$ per qualche $\beta > 0$, ove BV^0 risulta essere lo spazio di Hardy (reale) \mathcal{H}^1 , allora $\nabla^\alpha f$ converge a $\nabla^0 f$ in \mathcal{H}^1 per $\alpha \rightarrow 0^+$.

Spazi di funzioni olomorfe su dominî di Siegel (con M. M. Peloso)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un cono omogeneo, cioè un cono convesso, aperto e non vuoto tale che il gruppo $G(\Omega)$ degli automorfismi lineari di Ω agisca transitivamente su Ω , e si fissi un sottogruppo “triangolare” T di $G(\Omega)$ che agisca semplicemente e transitivamente su Ω (cf. [72]). Sia $\Phi: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ una mappa hermitiana, Ω -positive e T -omogenea, cioè tale che per ogni $t \in T$ esiste $g \in GL(\mathbb{C}^n)$ tale che $t \cdot \Phi = \Phi \circ (g \times g)$. Si consideri il dominio di Siegel omogeneo di tipo II

$$D := \{ (\zeta, z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : \rho(\zeta, z) := \text{Im} z - \Phi(\zeta) \in \Omega \}.$$

Dominî di questo tipo sono stati introdotti da I. J. Pjateckiĭ-Šapiro come modelli illimitati dei dominî omogenei e limitati (cf. [62]), e possono considerarsi come generalizzazioni del semipiano superiore \mathbb{C}_+ in \mathbb{C} . A differenza del caso di un dominio limitato, il cui bordo di Šilov è lo spazio omogeneo di un gruppo compatto di automorfismi del dominio, in questo caso il bordo di Šilov

$$bD = \{ (\zeta, z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : \rho(\zeta, z) = 0 \}$$

di D è illimitato, ma ammette una struttura di gruppo nilpotente di passo 2 che agisce per automorfismi affini (“traslazioni”) su D . Tra le funzioni su Ω , quelle relativamente T -invarianti, che discendono direttamente dai caratteri di T , hanno un particolare interesse e possono considerarsi come “funzioni potenza generalizzate”, secondo una terminologia proposta da S. G. Gindikin (cf. [36]). Tali funzioni possono parametrizzarsi nella forma $a\Delta_{\mathbf{s}}$, ove $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ e $a \in \mathbb{C}$, ed r è il rango del gruppo abeliano $T/[T, T]$, detto rango di Ω . Di conseguenza, gli spazi di Bergman pesati (a norma mista)

$$A_{\mathbf{s}}^{p,q} := \left\{ f \in \text{Hol}(D) : \left\| h \mapsto \Delta_{\Omega}^{\mathbf{s}}(h) \| f_h \|_{L^p(\mathcal{N})} \right\|_{L^q(\nu_{\Omega})} < \infty \right\}$$

godono di un particolare interesse. Qui, $p, q \in]0, \infty]$, ν_{Ω} indica una misura $G(\Omega)$ -invariante su Ω , \mathcal{N} è lo spazio $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^m$ con la struttura di gruppo ereditata da bD mediante la mappa $(\zeta, x) \mapsto (\zeta, x + i\Phi(\zeta))$, e $f_h: (\zeta, x) \mapsto f(\zeta, x + i\Phi(\zeta) + ih)$. Benché gli spazi di maggiore rilevanza siano gli spazi a norma “pura” $A_{\mathbf{s}}^{p,p}$, vi sono alcuni spazi a norma mista degni di nota: ad esempio, gli spazi $A_{\mathbf{0}}^{p,\infty}$ si riducono ai consueti spazi di Hardy, mentre gli spazi $A_{\mathbf{s}}^{2,q}$ sono di particolare utilità tecnica in quanto nel loro studio la trasformata di Fourier può essere impiegata con maggiore profitto.

Estendendo numerosi risultati presenti in letteratura in varia generalità (cf., come elenco non esaustivo, [7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 31, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 59, 58, 60, 61, 63, 68]), abbiamo considerato nella generalità sopra indicata i seguenti problemi:

- Teoremi di campionamento: sia $(\zeta_{j,k}, z_{j,k})_{j \in J, k \in K}$ un (δ, R) -reticolo, con $\delta > 0$ e $R > 1$, cioè una famiglia di punti di D per cui $h_k := \rho(\zeta_{j,k}, z_{j,k})$ sia indipendente da j , e per cui le palle $B_D((\zeta_{j,k}, z_{j,k}), \delta)$ e $B_\Omega(h_k, \delta)$ siano mutualmente disgiunte e le palle $B_D((\zeta_{j,k}, z_{j,k}), R\delta)$ e $B_\Omega(h_k, R\delta)$ ricoprano D e Ω , rispettivamente (rispetto ad opportune distanze invarianti su D e Ω). Allora, per opportuni $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^r$,

$$\|\Delta^{\mathbf{s}-(\mathbf{b}+\mathbf{d})/p}(h_k)f(\zeta_{j,k}, z_{j,k})\|_{\ell^{p,q}(J,K)} \lesssim \|f\|_{A_{\mathbf{s}}^{p,q}}$$

per ogni $f \in A_{\mathbf{s}}^{p,q}$. Inoltre, se δ è sufficientemente piccolo, R è limitato, e f “cresce lentamente all’infinito” (in particolare, se $f \in A_{\mathbf{s}}^{p,q}$), allora

$$\|\Delta^{\mathbf{s}-(\mathbf{b}+\mathbf{d})/p}(h_k)f(\zeta_{j,k}, z_{j,k})\|_{\ell^{p,q}(J,K)} \approx \|f\|_{A_{\mathbf{s}}^{p,q}}.$$

- Teoremi di Paley–Wiener: sia, per $\lambda \in \Omega'$ (il cono duale di Ω), π_λ l’unica (a meno di equivalenza) rappresentazione unitaria di \mathcal{N} in un qualche spazio hilbertiano H_λ per cui $\pi_\lambda(0, x) = e^{-i\langle \lambda, x \rangle}$. Allora la mappa

$$\Pi: A_{\mathbf{s}}^{2,2} \ni f \mapsto (e^{\langle \lambda, h \rangle} \pi_\lambda(f_h)) \in \int_{\Omega'}^{\oplus} H_\lambda \Delta^{-2\mathbf{s}-\mathbf{b}}(\lambda) d\lambda$$

non dipende da h e, a meno di una costante moltiplicativa, è un’isometria surgettiva (purché $A_{\mathbf{s}}^{2,2} \neq 0$).

- Teoremi di decomposizione atomica: detto $K_{\mathbf{s}}$ is nucleo riprodotte di $A_{\mathbf{s}}^{2,2}$, sono state determinate condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché la mappa

$$\Psi: \ell^{p,q}(J, K) \ni \lambda \mapsto \sum_{j,k} \lambda_{j,k} K_{\mathbf{s}'}(\cdot, (\zeta_{j,k}, z_{j,k})) \Delta^{2\mathbf{s}'-\mathbf{s}-(1-1/p)(\mathbf{b}+\mathbf{d})}(h_k) \in A_{\mathbf{s}}^{p,q}$$

sia ben definita, continua, ed eventualmente surgettiva, per un (δ, R) -reticolo $(\zeta_{j,k}, z_{j,k})$ con δ piccolo e R limitato.

- Teoremi di dualità: sono state determinate condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché la mappa sesquilineare

$$(f, g) \mapsto \int_D f(\zeta, z) \overline{g(\zeta, z)} \Delta^{\mathbf{s}+\mathbf{s}'-(\mathbf{b}+\mathbf{d})/\min(1,p)+\mathbf{b}+2\mathbf{d}} d(\zeta, z)$$

induca un isomorfismo antilineare di $A_{\mathbf{s}'}^{p',q'}$ sul duale di $A_{\mathbf{s}}^{p,q}$, ove $p' := \infty$ se $p \leq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ se $p \geq 1$.

- Teoremi di continuità per il proiettore di Bergman: sono state determinate condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché il proiettore di Bergman $P_{\mathbf{s}'}$, definito da

$$(P_{\mathbf{s}'}f)(\zeta, z) := \int_D f(\zeta', z') K_{\mathbf{s}'}((\zeta, z), (\zeta', z')) \Delta^{2\mathbf{s}'+\mathbf{d}}(\rho(\zeta', z')) d(\zeta', z'),$$

induca una mappa continua da $L_{\mathbf{s}}^{p,q}$ (definito come $A_{\mathbf{s}}^{p,q}$, ma sostituendo le funzioni misurabili alle funzioni olomorfe) su $A_{\mathbf{s}}^{p,q}$.

- Teoremi sui valori al bordo: sono stati definiti opportuni spazi di Besov $B_{-\mathbf{s}}^{p,q}$ e mappe di estensione

$$\mathcal{E}: B_{-\mathbf{s}}^{p,q} \rightarrow A_{\mathbf{s}-(\mathbf{b}+\mathbf{d})/p}^{p,q},$$

per opportuni valori di \mathbf{s} , per modo che $A_{\mathbf{s}}^{p,q} \subseteq \mathcal{E}(B_{-\mathbf{s}}^{p,q})$ e $\mathcal{E}(T)_h \rightarrow T$ distribuzionalmente per $h \rightarrow 0$, per ogni $T \in B_{-\mathbf{s}}^{p,q}$. Sono state determinate condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché $A_{\mathbf{s}}^{p,q} = \mathcal{E}(B_{-\mathbf{s}}^{p,q})$, nonché l’equivalenza di tale proprietà con versioni rafforzate delle proprietà di decomposizione atomica e di continuità dei proiettori di Bergman.

- Teoremi sulle misure di Carleson e di campionamento: sono state determinate condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché $A_{\mathbf{s}}^{p,q}$ si immerga con continuità (o compattezza) in $L^s(\mu)$, ove μ è una misura di Radon su D . Sono state determinate condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché $A_{\mathbf{s}}^{p,p}$ si immerga come sottospazio chiuso di $L^p(\mu)$.
- Teoremi di continuità per operatori di Toeplitz: sono state determinate condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché l'operatore di Toeplitz T , definito da

$$(Tf)(\zeta, z) := \int_D f(\zeta', z') K_{\mathbf{s}'}((\zeta, z), (\zeta', z')) d\mu(\zeta', z'),$$

induca mappe continue (o compatte) da $A_{\mathbf{s}}^{p,q}$ in $A_{\mathbf{s}'}^{p,q}$. Sono, inoltre, state determinate condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché T appartenga alla classe di Schatten $\mathcal{L}^p(A_{\mathbf{s}}^{2,2}; A_{\mathbf{s}'}^{2,2})$.

Spazi di Besov di Tipo Analitico

Lo studio degli spazi di Besov di tipo analitico $B_{\mathbf{s}}^{p,q}$ introdotti durante lo studio dei valori al bordo degli spazi di Bergman su domini di Siegel omogenei è stato approfondito come segue:

- sono state determinate condizioni sufficienti per inclusioni della forma $B_{\mathbf{s}_1}^{p_1,q_1} * B_{\mathbf{s}_2}^{p_2,q_2} \subseteq B_{\mathbf{s}_3}^{p_3,q_3}$;
- sono stati determinati teoremi di tipo Mihlin–Hörmander per moltiplicatori di Fourier *destri* per gli spazi $B_{\mathbf{s}}^{p,q}$;
- sono state studiate le proprietà degli spazi $B_{\mathbf{s}}^{p,q}$ in relazione all'interpolazione complessa; seguendo [69], è stato studiato un funtore di interpolazione complessa modificato rispetto a cui gli spazi $B_{\mathbf{s}}^{p,q}$ interpolano in modo naturale per tutti i possibili valori di $p, q \in]0, \infty]$ e $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$;
- sono state studiate le possibili inclusioni tra gli spazi di Besov $B_{\mathbf{s}}^{p,q}$ e opportuni spazi di Besov “classici”.

Operatori di Schrödinger su gruppi di Lie (con T. Bruno)

Siano G un gruppo di Lie e (X_1, \dots, X_k) una famiglia finita di campi vettoriali invarianti a sinistra generanti l'algebra di Lie di G . Si consideri il sub-Laplaciano

$$\mathcal{L} := \sum_j X_j^* X_j,$$

ove X_j^* indica l'aggiunto formale di X_j rispetto alla misura di Haar (sinistra) di G fissata. Sia, inoltre, V una funzione misurabile e reale su G . Allora l'operatore $\mathcal{L} + V$, ove V è pensato come operatore di moltiplicazione, può essere interpretato come una variante sub-Riemanniana dei più consueti operatori di Schrödinger $\Delta + V$ su \mathbb{R}^n . Sono state considerate condizioni necessarie e condizioni sufficienti per la discretezza dello spettro di $\mathcal{L} + V$ in alcuni contesti, generalizzando alcuni risultati presenti in letteratura (cf., come elenco non esaustivo, [3, 42, 56, 67, 30]). Sono stati conseguiti i seguenti risultati:

- La condizione sufficiente derivante da [3, Lemma 2.1] (cf. [30, Theorem 6]) è stata estesa al caso di gruppi di Lie generali;
- La condizione sufficiente [56, Teorema 3.1] è stata estesa al caso di gruppi di Lie generali;
- La condizione necessaria e sufficiente [56, Teorema 3.5] è stata estesa al caso di gruppi di Lie generali, utilizzando la nozione di polinomio introdotta in termini algebrici in [44] e reinterpretata in termini analitici in [2];
- La condizione necessaria e sufficiente [42, Theorem 2.10] è stata estesa al caso di gruppi di Lie generali;

- È stato studiato il collegamento tra operatori di Schrödinger e sub-Laplaciani pesati, approfondendo lo studio effettuato in [25].

Nel caso di gruppi di Métivier, sono state in particolare studiate le proprietà di discretezza dello spettro di $\mathcal{L} + e^{N^\alpha}$, ove N indica una particolare norma omogenea che coincide con la norma di Kaplan nel caso dei gruppi di tipo H .

Riferimenti bibliografici

- [1] Alexopoulos, G., Spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth, *Proc. Amer. Math. Soc.* **120** (1994), no. 3, pp. 973–979.
- [2] Antonelli, G., Le Donne, E., Polynomial and horizontally polynomial functions on Lie groups, arXiv:2011.13665.
- [3] Auscher, P., Ben Ali, B., Maximal inequalities and Riesz transform estimates on L^p spaces for Schrödinger operators with nonnegative potentials, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **57** (2007), no. 6, pp. 1975–2013.
- [4] Arazy, J., A Survey of Invariant Hilbert Spaces of Analytic Functions on Bounded Symmetric Domains, *Contemp. Math.* **185** (1995), p. 7–65.
- [5] Arazy, J., Fisher, S. D., Invariant Hilbert Spaces of Analytic Functions on Bounded Symmetric Domains, in *Operator Theory: Advances and Applications* **48** (1990), Birkhäuser Verlag, Basel, p. 67–91.
- [6] Arazy, J. Upmeyer, H., Invariant Inner Product in Spaces of Holomorphic Functions on Bounded Symmetric Domains, *Doc. Math. J. DMV* **2** (1997), p. 213–261.
- [7] Arcozzi, N., Monguzzi, A., Peloso, M. M., Salvatori, M., *Paley–Wiener Theorems on the Siegel Upper Half-Space*, *J. Fourier Anal. Appl.* **25** (2019), p. 1958–1986.
- [8] Astengo, F., Di Blasio, B., Ricci, F., Gelfand transforms of polyradial Schwartz functions on the Heisenberg group, *J. Funct. Anal.*, **251** (2007), p. 772–791.
- [9] Astengo, F., Di Blasio, B., Ricci, F., Gelfand Pairs on the Heisenberg Group and Schwartz Functions, *J. Funct. Anal.*, **256** (2009), p. 1565–1587.
- [10] Beals, R., Gaveau, B., Greiner, P., C., Hamilton-Jacobi Theory and the Heat Kernel on Heisenberg Groups, *J. Math. Pures Appl.*, **79** (2000), p. 633–689.
- [11] Békollé, D., Bergman Spaces with Small Exponents, *Indiana U. Math. J.* **49** (2000), p. 973–993.
- [12] Békollé, D., The Dual of the Bergman Space A^1 in Symmetric Siegel Domains of Type II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), p. 607–619.
- [13] Békollé, D., Bonami, A., Garrigós, G., Nana, C., Peloso, M. M., Ricci, F., Lecture Notes on Bergman Projectors in Tube Domains over Cones: an Analytic and Geometric Viewpoint, *IMHOTEP J. Afr. Math. Pures Appl.* **5** (2004), front matter + ii + 75 pp.
- [14] Békollé, D., Bonami, A., Garrigós, G., Ricci, F., Littlewood–Paley Decompositions Related to Symmetric Cones and Bergman Projections in Tube Domains, *P. Lond. Math. Soc.* **89** (2004), p. 317–360.
- [15] Békollé, D., Gonessa, J., Nana, C., Atomic Decomposition and Interpolation via the Complex Method for Mixed Norm Bergman Spaces on Tube Domains over Symmetric Cones, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5) **21** (2020), p. 801–826.
- [16] Békollé, D., Gonessa, J., Nana, C., Lebesgue Mixed Norm Estimates for Bergman Projectors: from Tube Domains over Homogeneous Cones to Homogeneous Siegel Domains of Type II, *Math. Ann.* **374** (2019), p. 395–427.

- [17] Békollé, D., Ishi, H., Nana, C., Korányi’s Lemma for Homogeneous Siegel Domains of Type II. Applications and Extended Results, *Bull. Aust. Math. Soc.* **90** (2014), p. 77–89.
- [18] Békollé, D., Sehba, B. F., Some Carleson Measures for the Hilbert–Hardy Space of Tube Domains over Symmetric Cones, *Eur. J. Math.* **5** (2019), p. 585–610.
- [19] Békollé, D., Sehba, B. F., Tchoundja, E. L., The Duren–Carleson Theorem in Tube Domains over Symmetric Cones, *Integr. Equ. Oper. Theory* **86** (2016), p. 475–494.
- [20] Békollé, D., Temgoua Kagou, A., Reproducing Properties and L^p -Estimates for Bergman Projections in Siegel Domains of Type II, *Stud. Math.* **115** (1995), p. 219–239.
- [21] Békollé, D., Temgoua Kagou, A., Molecular decompositions and interpolation, *Integral Equations Operator Theory* **31** (1998), p. 150–177.
- [22] Bonami, A., Three Related Problems of Bergman Spaces of Tube Domains over Symmetric Cones, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **13** (2002), p. 183–197.
- [23] Bonami, A., Buraczewski, D., Damek, E., Hulanicki, A., Penney, R., Trojan, B., Hua system and pluriharmonicity for symmetric irreducible Siegel domains of type II. *J. Funct. Anal.* **188** (2002), p. 38–74.
- [24] Bourgain, J., Brezis, H., Mironescu, P., Another Look at Sobolev Spaces, in Menaldi, J. L., Rofman, E., Sulem, A., editors, *Optimal control and partial differential equations*, IOS Press, 2001, pp. 439–455.
- [25] Bruno, T., Calzi, M., Weighted sub-Laplacians on Métivier Groups: Essential Self-Adjointness and Spectrum, *Proc. Amer. Math. Soc.* **145** (2017), p. 3579–3594.
- [26] Caffarelli, L., Roquejoffre, J.-M., Savin, O., Nonlocal minimal surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.* **63** (2010), pp. 1111–1144.
- [27] Christ, M., L^p Bounds for Spectral Multipliers on Nilpotent Groups, *Trans. Am. Math. Soc.*, **328** (1991), p. 73–81.
- [28] Coifman, R. R., Rochberg, R., Representation Theorems for Holomorphic and Harmonic Functions in L^p , *Astérisque* **77** (1980), p. 11–66.
- [29] Comi, G. E., Stefani, G., A distributional approach to fractional Sobolev spaces and fractional variation: Existence of blow-up, *J. Funct. Anal.* **277** (2019), pp. 3373–3435.
- [30] Dall’Ara, G. M., Discreteness of the Spectrum of Schrödinger Operators with Non-Negative Matrix-Valued Potentials, *J. Funct. Anal.* **268** (2015), p. 3649–3679.
- [31] Debertol, D., Besov Spaces and the Boundedness of Weighted Bergman Projections over Symmetric Tube Domains, *Publ. Mat.* **49** (2005), p. 21–72.
- [32] Eldredge, N., Precise Estimates for the Subelliptic Heat Kernel on H-type Groups, *J. Math. Pures Appl.*, **92** (2009), p. 52–85.
- [33] Fischer, V., Ricci, F., Gelfand Transforms of $SO(3)$ -Invariant Schwartz Functions on the Free Group $N_{3,2}$. *Ann. I. Fourier*, **59** (2009), p. 2143–2168.
- [34] Fischer, V., Ricci, F., Yakimova, O., Nilpotent Gelfand Pairs and Spherical Transforms of Schwartz Functions I: Rank-One Actions on the Centre, *Math. Z.*, **227** (2012), p. 221–255.
- [35] Gaveau, B. Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents, *Acta Math.*, **139** (1977), p. 95–153.
- [36] Gindikin, S. G., Analysis in Homogeneous Domains, *Russ. Math. Surv.* **19** (1964), p. 1–89.
- [37] Hebisch, W., Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups, *Colloq. Math.* **65**, pp. 231–239 (1993).

- [38] Hebisch, W., Zienkiewicz, J., Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups, II, *Colloq. Math.* **69**, pp. 29–36 (1995).
- [39] Hueber, H., Müller, D., Asymptotics for Some Green Kernels on the Heisenberg Group and the Martin Boundary, *Math. Ann.*, **283** (1989), p. 97–119.
- [40] Hulanicki, A., A functional calculus for Rockland operators on nilpotent Lie groups, *Stud. Math.*, **78** (1984), p. 253–266.
- [41] Inglis, J., Spectral inequalities for operators on H-type groups, *J. Spectr. Theory*, **2** (2012), p. 79–105.
- [42] Kondrat'ev, V. A., Shubin, M. A., Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry, in *The Maz'ya Anniversary Collection, vol.2*, p. 185–226.
- [43] Li, H.-Q., Estimations optimales du noyau de la chaleur sur les groupes de type Heisenberg, *J. Reine Angew. Math.*, **646** (2010), p. 195–233.
- [44] Leibman, A., Polynomial mappings of groups, *Israel J. Math.* **129** (2002), p. 29–60.
- [45] Li, H., Luecking, D. H., Schatten Class of Hankel and Toeplitz Operators on the Bergman Space of Strongly Pseudoconvex Domains, *Contemp. Math.* **185** (1995), p. 237–257.
- [46] Luecking, D. H., Inequalities on Bergman Spaces, *Illinois J. Math.* **25** (1981), p. 1–11.
- [47] Luecking, D. H., Equivalent Norms on L^p Spaces of Harmonic Functions, *Mh. Math.* **96** (1983), p. 133–141.
- [48] Luecking, D. H., Closed Ranged Restriction Operators on Weighted Bergman Spaces, *Pac. J. Math.* **110** (1984), p. 145–160.
- [49] Luecking, D. H., Forward and Reverse Carleson Inequalities for Functions in Bergman Spaces and their Derivatives, *Am. J. Math.* **107** (1985), p. 85–111.
- [50] Luecking, D. H., Sampling Measures for Bergman Spaces on the Unit Disk, *Math. Ann.* **316** (2000), p. 659–679.
- [51] Martini, A., *Algebras of Differential Operators on Lie Groups and Spectral Multipliers*, Ph.D. thesis, Scuola Normale Superiore, 2010, arXiv:1007.1119v1.
- [52] Martini, A., Analysis of joint spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth, *Ann. I. Fourier* **62** (2012), pp. 1215–1263.
- [53] Martini, A., Müller, D., Spectral Multipliers on 2-Step Groups: Topological Versus Homogeneous Dimension, *Geom. Funct. Anal.* **26** (2016), pp. 680–702.
- [54] Martini, A., Ricci, F., Tolomeo, L., Convolution kernels versus spectral multipliers for sub-Laplacians on groups of polynomial growth, *J. Funct. Anal.* **277** (2019), p. 1603–1638.
- [55] Maz'ya, V., Shaposhnikova, T., On the Bourgain, Brezis, and Mironescu Theorem Concerning Limiting Embeddings of Fractional Sobolev Spaces, *J. Funct. Anal.* **195** (2002), pp. 230–238.
- [56] G., M., Pallara, D., Discreteness of the spectrum for some differential operators with unbounded coefficients in \mathbb{R}^n , *Rend. Mat. Acc. Lincei* **11** (2000), pp. 9–19.
- [57] Nagel, A., Ricci, F., Stein, E. M., Harmonic Analysis and Fundamental Solutions on Nilpotent Lie Groups, in *Analysis and partial differential equations, Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, vol. 122, Dekker, New York, 1990, pp. 249–275.
- [58] Nana, C., $L^{p,q}$ -Boundedness of Bergman Projections in Homogeneous Siegel Domains of Type II, *J. Fourier Anal. Appl.* **19** (2013), p. 997–1019.
- [59] Nana, C., Sehba, B. F., Carleson Embeddings and Two Operators on Bergman Spaces of Tube Domains over Symmetric Cones, *Integr. Equ. Oper. Theory* **83** (2015), p. 151–178.

- [60] Nana, C., Trojan, B., L^p -Boundedness of Bergman Projections in Tube Domains over Homogeneous Cones, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **10** (2011), p. 477–511.
- [61] Ogden, R. D., Vági, S., Harmonic Analysis of a Nilpotent Group and Function Theory on Siegel Domains of Type II, *Adv. Math.* **33** (1979), p. 31–92.
- [62] Pjateckii-Šapiro, I. I., Geometry of Homogeneous Domains and the Theory of Automorphic Functions. The Solution of a Problem of É. Cartan (Russian), *Uspehi Mat. Nauk* **14** (1959), p. 190–192.
- [63] Ricci, F., Taibleson, M., Boundary Values of Harmonic Functions in Mixed Norm Spaces and Their Atomic Structure, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **10** (1983), p. 1–54.
- [64] Shieh, T.-T., Spector, D. E., On a new class of fractional partial differential equations II, *Adv. Calc. Var.* **11** (2018), pp. 289–307.
- [65] Sikora, A., On the $L^2 \rightarrow L^\infty$ Norms of Spectral Multipliers of “Quasi-Homogeneous” Operators on Homogeneous Groups., *T. Am. Math. Soc.* **351** (1999), no. 9, pp. 3743–3755.
- [66] Šilhavý, M., Fractional vector analysis based on invariance requirements (Critique of coordinate approaches), http://www.math.cas.cz/fichier/preprints/IM_20180320181544_12.pdf.
- [67] Simon, B., Schrödinger Operators with Purely Discrete Spectrum, *Methods Funct. Anal. Topology* **15** (2009), pp. 61–66.
- [68] Temgoua Kagou, A., The Duals of Bergman Spaces in Siegel Domains of Type II, *IMHOTEP* **1** (1997), p. 41–87.
- [69] Triebel, H., *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, 1983.
- [70] Tolomeo, L., *Misure di Plancherel associate a sub-laplaciani su Gruppi di Lie*, master’s degree thesis (2015).
- [71] Veneruso, A., Schwartz Kernels on the Heisenberg Group, *B. Unione Mat. Ital.*, **6-B** (2003), p. 657–666.
- [72] Vinberg, E. B., The Theory of Convex Homogeneous Cones, *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** (1965), p. 340–403.